UNIDAD TEMÁTICA I: Conjuntos. Números Reales. Recta real

Conceptos importantes

Llamamos conjunto a toda pluralidad, cada uno de cuyos objetos es un elemento del conjunto, y diremos que un **conjunto** está **definido** o determinado cuando establecido un convenio cualquiera no contradictorio, podemos saber si un elemento dado pertenece o no al conjunto, el cual está formado por todos los objetos que cumplan el convenio.

Un **conjunto** es **finito** si se puede ordenar de manera tal que tenga un primer elemento al que no preceda ninguno, y un último elemento al que no siga ninguno.

Los **conjuntos** que carecen de primer y/o último elemento se llaman **infinitos.**

En este curso trabajaremos con el conjunto de números reales R.

PRESENTANDO A LOS NÚMEROS REALES

Los números reales (denotados por R) son el conjunto de números creados por el hombre para poder transmitir mediante un lenguaje unificado distintas cantidades, expresadas por una serie de símbolos y 10 dígitos, lo que ha otorgado a la sociedad la capacidad de medición y exactitud con que cuenta y se rige hoy en día.

Veamos de qué manera se conforman los **números reales (R):**

Los números 1, 2, 3, etc, se denominan **números naturales (N).** Si sumamos o multiplicamos dos números naturales cualesquiera, el resultado siempre es un número natural, como podemos ver en los ejemplos:

$2 + 4 = 6 \quad y \quad 2.4 = 8$ en ambos casos los resultados son números naturales.

En cambio, si restamos o dividimos dos números naturales, el resultado no siempre es un número natural.

Por ejemplo, $6 - 2 = 4$ es natural pero $2 - 6$ no es natural,

Al igual que en $12 : 3 = 4$ es natural pero $3 : 12$ no lo es.

Así, dentro del conjunto de números naturales, siempre podemos sumar y multiplicar, pero no siempre podemos restar o dividir.

Entre dos números naturales existe siempre un número finito de números naturales, por lo que se dice que N es un conjunto **discreto**

Con la finalidad de superar la limitación de la sustracción, extendemos el conjunto de los números naturales al conjunto de los **números enteros (Z).** Los enteros incluyen los números naturales, los negativos de cada número natural y el número cero (0). De este modo, podemos representar el conjunto de los enteros mediante

$$\ldots - 3, -2, -1, -0, 1, 2, 3, \ldots$$

Es claro que los números naturales también son enteros. Si sumamos, multiplicamos o restamos dos enteros cualesquiera, el resultado también es un entero.

Por ejemplo: $-3 + 8 = 5, \quad (-3).(5) = 15 \quad y \quad 3 - 8 = -5$ en todos los casos sus resultados son enteros.

Pero aún no podemos dividir un entero entre otro y obtener un entero como resultado.

Por ejemplo, vemos que: $8{:}4 = 2$ es un entero, pero $8 : 3$ no lo es.

Por tanto, dentro del conjunto de los enteros, podemos sumar, multiplicar y restar pero no siempre podemos dividir.

Entre dos números enteros existe siempre un número finito de números enteros, por lo que se dice que Z es un conjunto **discreto**

Para superar la limitación de la división, extendemos el conjunto de los enteros al conjunto de los **números racionales (Q).** Este conjunto consiste en todas las fracciones $\frac{a}{b}$, donde a y b son enteros con $b \neq 0$.

Un número es racional si podemos expresarlo como la razón de dos enteros con denominador distinto de cero. $-\frac{8}{3}, \frac{5}{7}, \frac{0}{3}, \frac{6}{1} = 6$ son ejemplos de números racionales.

Podemos sumar, multiplicar, restar y dividir cualesquiera dos números racionales (exceptuando la división por cero) y el resultado siempre es un número racional. De esta manera las cuatro operaciones fundamentales de la aritmética: adición, multiplicación, sustracción y división son posibles dentro del sistema de los números racionales.

Cuando un número racional se expresa como un decimal, los decimales terminan o presentan un patrón que se repite indefinidamente.

Por ejemplo: $\frac{1}{4} = 0{,}25 \quad y \quad \frac{93}{80} = 1{,}1625$. tienen una cantidad finita de cifras decimales.

Mientras que $\frac{1}{6} = 0{,}16666\ldots$ o $\frac{4}{7} = 0{,}5714285714285\ldots$, corresponden a decimales en que alguna cifra de la parte decimal se repite periódicamente.

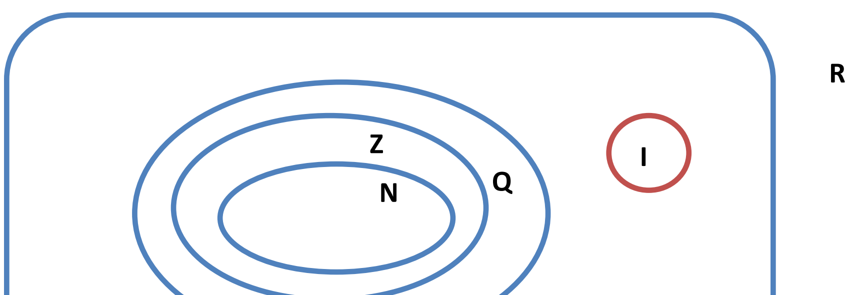
De esta manera podemos afirmar que todos los números racionales, son aquellos que pueden expresarse como la razón entre dos números enteros.

También existen algunos números de uso común que no son racionales (es decir, que no pueden expresarse como la razón de dos enteros). Por ejemplo, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$ y no son números racionales.

Tales números se denominan **números irracionales (I).** La diferencia esencial entre los números racionales y los irracionales se advierte en sus expresiones decimales. Cuando un número irracional se presenta por medio de decimales, los decimales continúan indefinidamente sin presentar ninguna cifra repetitiva. Por ejemplo, con diez cifras decimales $\sqrt{2}$ =1.4142135623… No importa con cuántos decimales expresemos estos números, nunca presentarán un patrón repetitivo, en contraste con los patrones que ocurren en el caso de los números racionales.

El término **número real (R)** se utiliza para indicar un número que es racional o irracional. El conjunto de los números reales consta de todas las posibles expresiones decimales. Aquellos decimales que terminan o se repiten corresponden a los números racionales, mientras que los restantes corresponden a los números irracionales.

El siguiente esquema muestra de qué manera se conforma el conjunto de los números reales:



Propiedades de los números reales

A continuación enumeraremos las propiedades básicas de dos operaciones definidas en R, como son la suma y el producto, y partimos de ellas ya que será sencillo deducir las propiedades de otras operaciones, a partir de ellas.

Si $x, y \in R$, indicaremos la suma con $x + y$ y el producto con $x.y$ .Estas operaciones son cerradas, es decir, el resultado pertenece a ***R.***

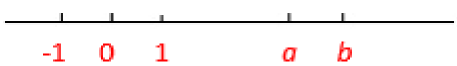
- ***Propiedades algebraicas***
  1. Propiedad Asociativa:
     $$x + (y + z) = (x + y) + z \quad , \quad x.(y.z) = (x.y).z \qquad \forall x, y, z \in R$$
  2. Propiedad Conmutativa:
     $$x + y = y + x \quad , \quad x.y = y.x \qquad \forall x, y \in R$$
  3. Existencia del elemento neutro:
     en la suma: $\exists 0 \in R / 0 + x = x$ en el producto: $\exists 1 \neq 0 \in R / 1 . x = x, \quad \forall x \in R$
  4. Existencia del opuesto para la suma: $\forall x \in R: \exists(-x) \in R / \, x + (-x) = 0$
  5. Existencia del recíproco para el producto: $\forall x \neq 0 \in R: \exists x^{-1} \in R / \, x.x^{-1} = 1$
  6. Distributiva del producto respecto de la suma: $x.(y + z) = x.y + x.z, \forall x, y, z \in R$

Puntos y números

Existe una correspondencia biunívoca entre los números reales y los puntos de una recta. Esta correspondencia nos autoriza a considerar como sinónimos las palabras punto y número, y podemos hablar de distancia entre dos números y las relaciones aritméticas se podrán expresar en lenguaje geométrico y viceversa.

Representación en la recta numérica

Sobre una recta elegimos un punto para representar el cero (0) y otro punto a la derecha para representar el uno (1) con lo que se considera determinada la escala (segmento unidad). Los números positivos (R^+) están a la derecha del cero y los negativos (R^-) la izquierda.



A cada número real corresponde un solo punto de la recta y a cada punto de la recta un solo número real. Designaremos a esta recta: **recta real o eje real.** Decimos simplemente "el punto x_0" en lugar de "el punto correspondiente al n° real x_0".

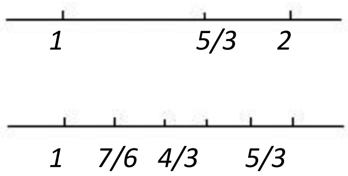
Interpretación geométrica: Según el lugar que un n° ocupa en la recta numérica, podemos establecer una relación de orden. Si el punto a esta a la izquierda del punto b, decimos que a es menor que b y se simboliza $a < b$.

Relación de orden en Q: El conjunto de n° Racionales es totalmente ordenado, siempre se podrá establecer una comparación entre ellos, mediante los símbolos de $<$; $>$; $\leq o \geq$, donde se cumple:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} <=> a.d < c.b$$

¿Entre dos n° racionales existe otro n° racional? ¿Cuántos números puede haber entre ellos?

- ***Propiedades* de densidad:** Entre dos números reales existe siempre un número racional, lo que se expresa diciendo que ***Q es denso en R.***



A cada número racional le corresponde uno y solo un punto de la recta y podemos observar que entre dos racionales existen infinitos números racionales.

Sean a, b y x, números Racionales si x* está entre *a* y *b entonces se verifica que:

$$\boldsymbol{si\ a < b \rightarrow \exists x \in Q / a < x < b}$$

Sin embargo, no todos los puntos de las rectas están relacionados con un n° racional, es el conjunto de los irracionales quien completa la relación biunívoca entre los puntos de la recta y los números reales. Decimos entonces que el conjunto R es ***continuo.*** Para todo $a < b$, si y solo si existe un punto x que satisface las desigualdades $a < x < b$, es decir x está entre *a* y *b.*

Actividad Nº 1: Expresen cada enunciado como una desigualdad:

a) *x* es menor que 7
b) El cociente entre *p* y *q* es menor que 7
c) *z* es mayor o igual que -4
d) *c* esta entre $\frac{1}{5}$ y $\frac{4}{3}$
e) El recíproco (inverso multiplicativo) de *f* es menor de 14

En R se establece una relación de orden $x \leq y$ (se lee x es menor o igual que y) o $x \geq y$ (se lee x es mayor o igual que y)

- ***Propiedades* de orden**: $sean\ a, b, c\ \in R$

1. *Ley de tricotomía:* $a < b\ \ o\ \ a = b\ \ o\ \ a > b$*, se verifica exactamente uno y solo uno de ellos.*

2. Propiedad transitiva: $Si\ \ a < b\ e\ b < c, entonces\ \ a < c$
3. $x \leq y\ e\ y \leq x, equivale\ a\ decir\ x = y$
4. *$Si\ es\ x \leq y\ entonces\ x + z \leq y + z$ (Si en una inecuación sumamos el mismo número real en ambos miembros, entonces la inecuación obtenida es equivalente a la inicial)*
5. $Si\ x < y\ \ ,\ \ z > 0\ entonces\ x.z < y.z$ (Si en una inecuación multiplicamos por el mismo número real positivo en ambos miembros, entonces la inecuación obtenida es equivalente a la inicial)
6. $Si\ x < y\ \ ,\ \ z < 0\ entonces\ x.z > y.z$ (Si en una inecuación multiplicamos por el mismo número real negativo en ambos miembros, entonces la inecuación se invierte)
7. Si se cumple: 0 < *a* < *b* entonces $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$
8. Si se cumple: 0 < *a* < *b* entonces $a^2 < b^2$

Estas propiedades serán utilizadas para la resolución de ejercicios y demostraciones de próximas propiedades y Teoremas.

- ***Sistema ampliado de n° reales***

El sistema ampliado de los números reales está constituido por el conjunto de los n°reales a los que se le agrega dos símbolos: $-\infty\ y + \infty$, con las siguientes propiedades:

$\forall x\ \in R, se\ verifica\ que$:

1. $-\infty < x < +\infty$
2. $x + \infty = +\infty$
3. $x - \infty = -\infty$
4. $\frac{x}{\pm\infty} = 0\ o\ \frac{x}{-\infty} = 0$
5. Si $x > 0 \rightarrow x.(+\infty) = +\infty$
   $x > 0 \rightarrow x.(-\infty) = -\infty$
6. Si $x < 0 \rightarrow x.(+\infty) = -\infty$
   $x < 0 \rightarrow x.(-\infty) = +\infty$
7. $(+\infty).(+\infty) = +\infty \qquad (-\infty).(-\infty) = +\infty$
   $(+\infty).(-\infty) = -\infty \qquad (-\infty).(+\infty) = -\infty$

Estas propiedades serán utilizadas en el cálculo de límites.

Actividad Nº 2: Indicá cuales de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

- ***Todo par de n° Reales son comparables***
- ***Algunos pares n° Reales son comparables***
- ***Existen dos n° R tales que si a > b entonces nunca puede cumplirse a=b o a < b***
- ***Existen dos n° R tales que si a < b entonces puede cumplirse a=b o a < b***
- ***Si a=0, existe un n° real b tal que si a < b entonces puede cumplirse a=b o a < b***
- ***Sean a y b dos n° R, será verdadera una y solo una de las condiciones: a=b; a < b ó a > b***
- ***Sean a y b dos n° R, si $a \leq b$ entonces puede cumplirse a=b y a < b***

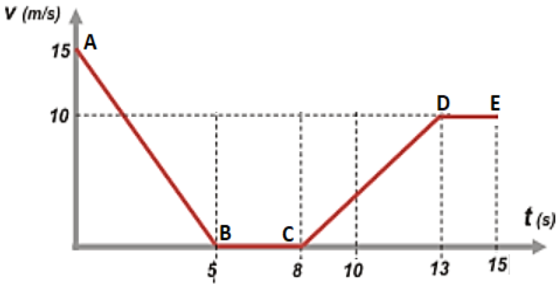
Resumiendo…

Los números reales es un campo, donde las operaciones entre números de un mismo conjunto tienen propiedades algebraicas, como por ejemplo la suma y la multiplicación de los racionales. Cuando se dice que el campo de los reales es ordenado, lo que quiere decir es que en éste existe el concepto de desigualdad con todas las propiedades antes expuestas. A cada punto de la recta infinita, le queda asignado un número real y no hay reales que no sean asignados a un punto; en esta asignación se agotan, simultáneamente, puntos y reales. La recta interpretada así, la llamaremos ***recta real****. Entonces, la recta real es una recta física ideal que tiene asignado un número real a cada uno de sus puntos. Los reales "cubren" toda la recta. Debido a que esta es un objeto físico idealmente continuo, diremos que los reales son un sistema continuo de números. Por lo que se define, finalmente a los n° Reales como:*

El sistema de los números reales es un campo ordenado y continuo.

INTERVALOS: Definición y representación gráfica

Actividad Nº 1: La siguiente figura indica la velocidad en función del tiempo que llevó un cuerpo durante su recorrido:



a) ¿De cuántos segundos del recorrido nos da información la gráfica?
b) ¿A qué conjunto numérico pertenece el tiempo en que se transcurre el movimiento?
c) ¿El tiempo transcurrido es un conjunto continuo o discreto?
d) ¿Se puede enumerar los instantes transcurridos?
e) ¿De qué manera se suele definir el tiempo transcurrido entre los momentos de inicio y finalización de cada tipo de movimiento? ¿Qué ocurre en el segundo en el que el tipo de movimiento cambia, se incluye o no al conjunto?
f) ¿En qué momento el cuerpo se detiene y en que instante se mantiene en reposo?
g) ¿Cuáles son los segundos en los que el cuerpo pose aceleración y cuáles en los que hay desaceleración?
h) ¿En qué momentos se registra que el cuerpo se encuentra en movimiento?

En la situación planteada, cuando la respuesta corresponde a <u>un</u> instante, representa un punto en el conjunto t, pero si la respuesta corresponde u un subconjunto de t, es decir, debemos indicar "desde… hasta …" será necesario incorporar una simbología diferente a la desigualdad.

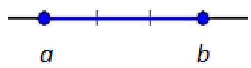
INTERVALOS

Intervalos limitados: Si a y b son números reales, tal que $a < b$, podemos definir los siguientes subconjuntos de R llamados **Intervalos**:

- **Intervalo cerrado: es el conjunto de números reales x tales que $a \leq x \leq b$, y se indica:**

$$[a, b] = \{x \in R / a \leq x \leq b\}$$

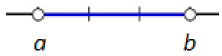
Su representación gráfica en un eje sería:



- **Intervalo abierto: es el conjunto de números reales x tales que $a < x < b$, y se indica:**

$$(a, b) = \{x \in R /\ a < x < b\}$$

Su representación gráfica en un eje sería:



- **Intervalo semiabierto o semicerrado:**

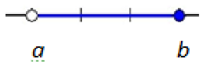
Semicerrado a izquierda o semiabierto a derecha: es el conjunto de números reales x tales que $a \leq x < b$, y se indica: $[a, b) = \{x \in R /\ a \leq x < b\}$

Su representación gráfica en un eje sería:

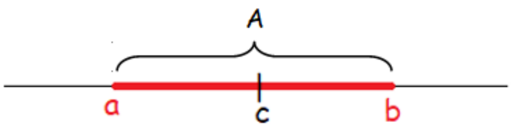
- **Semicerrado a derecha o semiabierto a izquierda: es el conjunto de números reales x tales que $a < x \leq b$, y se indica:**

$$(a, b] = \{x \in R /\ a < x \leq b\}$$

Su representación gráfica en un eje sería:



Los números reales a y b se denominan extremos, a (inferior) y b (superior). Dependerá de que pertenezcan o no al conjunto para que el intervalo sea cerrado o abierto respectivamente.



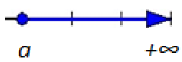
<u>Amplitud:</u> se denomina al número positivo que resulta de hacer $A = b - a$.
<u>Punto medio:</u> es el número que resulta de hacer $c = \frac{a+b}{2}$

<u>Intervalos no limitados:</u> Si a y b son números reales, podemos definir los siguientes subconjuntos de R:

- **Intervalo cerrado en *a*: es el conjunto de números reales x tales que $a \leq x$, y se indica:**

$$[a, +\infty) = \{x \in R / x \geq a\}$$

Su representación gráfica es una semirrecta de origen *a*, formada por todos los valores mayores o iguales que *a*:

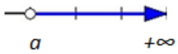


Aclaración: los símbolos +∞ (infinito positivo) o - ∞ (infinito negativo) <u>no</u> son números reales y en el extremo en los que aparecen deben ser siempre abiertos.

- **Intervalo abierto en *a*: es el conjunto de números reales x tales que $a < x$, y se indica:**

$$(a, +\infty) = \{x \in R /\ x > a\}$$

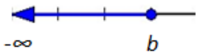
Su representación gráfica es una semirrecta de origen a, formada por todos los valores mayores que *a y no contiene al origen*:



- **Intervalo cerrado en *b*: es el conjunto de números reales x tales que $x \leq b$, y se indica:**

$$(-\infty, b] = \{x \in R / x \leq b\}$$

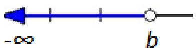
Su representación gráfica es una semirrecta de origen *b*, formada por todos los valores menores o iguales que *b*:



- **Intervalo abierto en *b*: es el conjunto de números reales x tales que $x < b$, y se indica:**

$$(-\infty, b) = \{x \in R / \ x < b\}$$

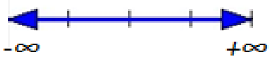
Su representación gráfica es una semirrecta de origen *b*, formada por todos los valores menores que *b y no contiene al origen*:



- **Intervalo infinito: es el conjunto de números reales x tales que $-\infty < x < \infty$, y se indica:**

$$(-\infty, +\infty) = \{x \in R / -\infty < x < \infty\}$$

Su representación gráfica es toda la recta numérica:



Actividad Nº 2: Indicá con una X a cuál de los conjuntos dados, pertenece el valor de x:

	$x \geq -2$	$x < 0$	(-1 ; 3,5]	$\left(-\infty; -{}^{5}/_{2}\right)$
x= 0				
x= -1,3				
x= -2,5				
x=7/2				

Actividad Nº 3: Representá gráficamente cada uno de los intervalos de la actividad 2.

Trabajo de reafirmación conceptual y procedimental

Elegí la opción correcta:

1) El intervalo (2;8) está formado por…

   - Todos los números del 2 al 8 ambos inclusive.
   - Todos los números del 2 al 8, sin incluir ni el 2 ni el 8.
   - Los números 2 y 8.

2) El intervalo [-3;1) está formado por …

- Todos los números comprendidos entre -3 y 1, incluyendo el – 3 pero no el 1.
- Todos los números comprendidos entre -3 y 1, incluyendo el 1 pero no el -3.
- Todos los números comprendidos entre -3 y 1, sin incluir ni el -3 ni el 1.

3) Escribir (-2; -1) es equivalente a escribir …

- $\{x \in R\!:\! -2 < x < -1\}$
- $\{x \in R\!:\! -1 < x < -2\}$
- $\{x \in R\!:\! -2 \leq x \leq -1\}$

4) Escribir $\{x \in R\!: 3 < x \leq 7\}$ es equivalente a …

- (3;7)
- [3;7)
- (3;7]

5) La expresión $\{x \in R\!: 3 \leq x < 5\}$ indica todos los números comprendidos entre …

- 3 y 5, incluyendo el 5 pero no el 3.
- 3 y 5, incluyendo el 3 pero no el 5.
- 3 y 5 con ambos números inclusive.

6) El intervalo [2;5) se corresponde a la representación gráfica …

- 

- 

- 

7) La representación gráfica 

indíca …

- Cualquier número contenido entre 3 y 7 pero sin incluirlos.
- Cualquier número contenido entre 3 y 7 ambos inclusive.
- Cualquier número menor que 3 y mayor que 7.

8) La representación gráfica 

indíca …

- Cualquier número menor que -3 y mayor que 2.
- Cualquier número menor que -3 y mayor o igual a 2.
- Cualquier número menor o igual a 2 y mayor que -3.

9) La representación gráfica 

se corresponde con la expresión …

- $\{x \in R\!:\! -1 < x < 3\}$
- $\{x \in R\!: 3 \leq x \leq -1\}$

- $\{x \in R: -1 \leq x \leq 3\}$

10) La representación gráfica 

se corresponde con …

- (4;12)
- [4;12)
- (4;12]

COTAS, EXTREMOS Y ELEMENTOS

Sea *A* un subconjunto no vacío de *R* y *k* un número real que puede o no pertenecer a *A*. D*ecimos que k* es una ***cota superior*** si no es superado por ningún elemento del conjunto A.

Simbólicamente: $\boldsymbol{k\ es\ cota\ superior\ de\ A} \leftrightarrow \forall \boldsymbol{x}: \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{k}.$

- Un conjunto que admite cota superior se dice ***acotado superiormente***.
- Un conjunto que tiene una cota superior tiene infinitas cotas superiores. A la menor de las cotas superiores se la denomina ***extremo superior o supremo*** de A.

Definición: ***s*** es *extremo superior o supremo* de un conjunto A si y solo si:

s y **k** son cotas superiores de A , entonces $\boldsymbol{s} \leq \boldsymbol{k}, \forall \boldsymbol{k}$

- Si **s** pertenece al conjunto A recibe el nombre de ***máximo*** del conjunto.

Por ejemplo: el conjunto R^- está acotado superiormente por R^+

Sea *A* un subconjunto no vacío de *R* y *h* un número real que puede o no pertenecer a A. D*ecimos que h* es una ***cota inferior*** de A si y solo si, no supera a ningún elemento de A.

Simbólicamente: $\boldsymbol{h\ es\ cota\ inferior\ de\ A} \leftrightarrow \forall \boldsymbol{x}: \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{h}.$

- Un conjunto que admite cota inferior se dice ***acotado inferiormente***.
- Un conjunto que tiene una cota inferior, tiene infinitas cotas inferiores. A la mayor de las cotas inferiores se la denomina ***extremo inferior o ínfimo*** de A.

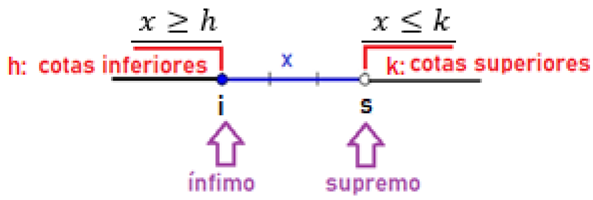
Definición: ***i*** es *extremo inferior o ínfimo* de un conjunto A si y solo si:

i y ***h*** son cotas inferiores de A, entonces $\boldsymbol{i} \geq \boldsymbol{h}, , \forall \boldsymbol{h}$

- Si ***i*** pertenece al conjunto A recibe el nombre de ***mínimo*** del conjunto.

Por ejemplo, 0 es el ínfimo de los R^+ y el mínimo de R_0^+.

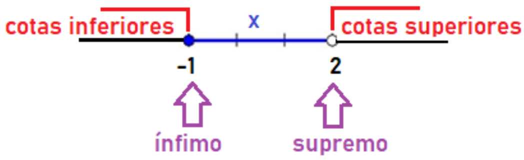
Gráficamente, sea $x \in A$, las cotas y elementos serían:



Axioma de completitud

> - *Todo subconjunto A no vacío de R, acotado superiormente, posee extremo superior o supremo.*
> - *Todo subconjunto A no vacío de R, acotado inferiormente, posee extremo inferior o ínfimo.*

Ejemplo: Sea $x \in [-1;2)$



Cotas superiores: [2;∞) porque son los $k \geq x, \forall x \in [-1;2)$

Cotas inferiores: (-∞; -1] porque son los $h \leq x, \forall x \in [-1;2)$

Supremo: s=2 porque es la menor de las cotas superiores

Ínfimo: i =-1 porque es la mayor de las cotas inferiores.

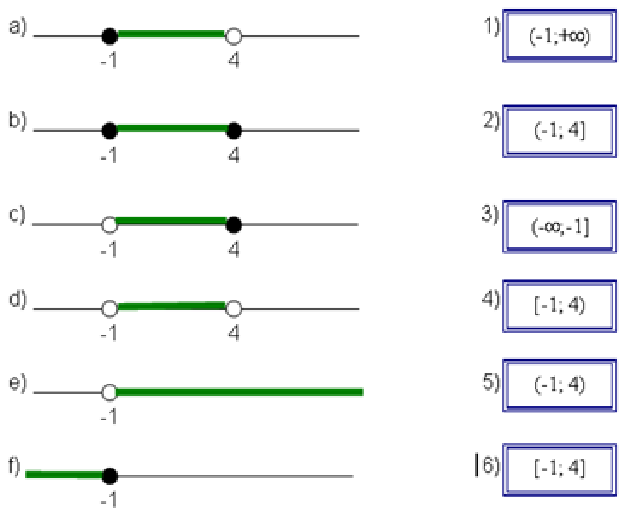
Por último, prestamos atención al tipo de intervalo, si es abierto, cerrado o semiabierto para establecer si existe elemento máximo o mínimo.

En este caso,

Elemento Máximo: no tiene (porque $2 \notin [-1;2)$)

Elemento Mínimo: -1 (tiene porque $-1 \in [-1;2)$)

Actividad Nº 1: Uní cada gráfica con el intervalo que define el conjunto, y analizá la existencia de cotas extremos y elementos:



INECUACIONES DE NÚMEROS REALES

En diversos campos de la ciencia encontramos expresiones tales como:

$$x+5<3, \quad 2x-5\geq 0, \quad x^2-1\leq 0 \quad , \frac{x-2}{x}>3 \quad , |2x-1|<4$$

Estas expresiones se conocen con el nombre de ***inecuaciones de números reales,*** estas desigualdades son necesarias porque en la mayoría de los casos no es se puede trabajar con mediciones absolutamente exactas, ya que la mayoría de los instrumentos de medida están hechos para medir dentro de un cierto rango.

Propiedades de las inecuaciones

Las siguientes propiedades se aplican en la resolución de inecuaciones:

1. Si en una inecuación sumamos el mismo número real en ambos miembros, entonces la inecuación obtenida es equivalente a la inicial.

   Sea $x<y$ entonces $x+a < y+a$

2. Si en una inecuación multiplicamos por el mismo número real positivo en ambos miembros, entonces la inecuación obtenida es equivalente a la inicial.

   Sea $x<y$, $a>0$, entonces $ax < ay$

3. Si en una inecuación multiplicamos por el mismo número real negativo en ambos miembros, entonces la inecuación se invierte.

   Sea $x<y$, $a<0$, entonces $ax > ay$

4. Si en una inecuación elevamos a -1 a ambos miembros, entonces la inecuación se invierte.

   Sea $0<a<b$ entonces $a^{-1}>b^{-1}$ ó $\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$

5. Si en una inecuación elevamos por el mismo número real positivo en ambos miembros, entonces la inecuación obtenida es equivalente a la inicial

   Sea $0<a<b$ entonces $a^n<b^n$, con $n>0$

Conceptos importantes para tener en cuenta en la resolución de inecuaciones

Los siguientes conceptos podrás consultarlos y aplicarlos en los ejercicios de resolución de inecuaciones:

- **UNIÓN DE CONJUNTOS**

Sean A, B dos conjuntos, entonces: $A \cup B = \{x / x \in A, o, x \in B\}$, en palabras: La unión de dos conjuntos consiste en formar un nuevo conjunto con todos los elementos de ambos conjuntos.

Ejemplo: Dados los intervalos [-2,3] y (1,9) realicen su unión:

$$[-2,3]\cup(1,9) = [-2,9)$$

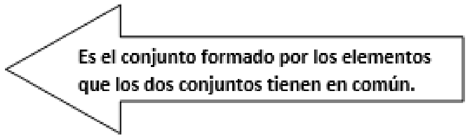
Es el conjunto formado por los elementos de los dos conjuntos.

- **INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS**

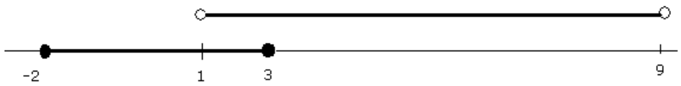
Sean A, B dos conjuntos, entonces: $A \cap B = \{x / x \in A, y, x \in B\}$ en palabras: La intersección de dos conjuntos consiste en formar un nuevo conjunto con los elementos comunes, es decir, solo los elementos que pertenezcan simultáneamente a ambos conjuntos.

Ejemplo: Dados los intervalos [-2,3] y (1,9) realicen su intersección:

$$[-2,3] \cap (1,9) = (1,3]$$



Nota: Para la intersección es de mucha ayuda hacer la representación gráfica de los conjuntos, como lo muestra la figura, para luego ver el conjunto que tienen en común, observen que el número 1 solo pertenece a uno de los intervalos mientras que el número 3 pertenece a los dos conjuntos.



Inecuaciones de primer grado con una incógnita

Llamamos inecuación de primer grado con una incógnita a una expresión de la forma:

$$P(x) < Q(x);\ P(x) \leq Q(x);\ P(x) > Q(x);\ P(x) \geq Q(x)$$

Donde $P(x)\ y\ Q(x)$ son expresiones racionales que dependen de x.

Para la resolución, se transforma, $P(x) < Q(x)$ en una equivalente de la forma $A(x) < 0, donde\ A(x)$ es un polinomio de 1°grado.

Resolver una inecuación significa encontrar un conjunto de variación de x, llamado *conjunto solución de la inecuación*, talque todos los valores de x, satisfacen la relación de desigualdad $P(x) < Q(x)$.

Generalmente la solución de una inecuación es un conjunto finito de intervalos, mientras que la solución de una ecuación es un conjunto finito de números.

Veremos a continuación, algunos ejemplos:

Solución de inecuaciones de tipo lineal o 1° grado

1. Hallen el conjunto solución de la inecuación: $3x+1<4$

$$\begin{array}{ll}
3x+1-1<4-1 & \text{propiedad 1de inecuaciones} \\
3x+0<3 & \text{propiedad del inverso aditivo} \\
3x<3 & \text{propiedad modulativa de la suma} \\
\frac{1}{3}(3x)<\frac{1}{3}(3) & \text{propiedad 2 de inecuaciones} \\
1x<\frac{3}{3} & \text{propiedad del inverso multiplicativo} \\
x<1 & \text{propiedad modulativa del producto}
\end{array}$$

Aquí tenemos que la solución es el conjunto de números *x*, tales que *x* < 1, es decir, la solución es el intervalo $(-\infty, 1)$.Obsérvese que el intervalo es abierto en 1.

La gráfica correspondiente es:

2. Hallen el conjunto solución de la inecuación: $2x+3 \geq -1$

$$\begin{array}{ll}
2x+3-3 \geq -3-1 & \text{propiedad 1 de inecuaciones} \\
2x+0 \geq -4 & \text{propiedad del inverso aditivo} \\
2x \geq -4 & \text{propiedad modulativa de la suma} \\
\frac{1}{2}(2x) \geq \frac{1}{2}(-4) & \text{propiedad 2 de inecuaciones} \\
1x \geq -\frac{4}{2} & \text{propiedad del inverso multiplicativo} \\
x \geq -2 & \text{propiedad modulativa del producto}
\end{array}$$

En este caso la solución es el conjunto de los números *x* tales que $x \geq -2$, es decir, la solución es el intervalo $[-2, \infty)$. Obsérvese que el intervalo es cerrado en – 2.

La gráfica correspondiente es:

3. Hallen el conjunto solución de la inecuación: $-5x-3 \leq -6$

$$\begin{array}{ll}
-5x-3+3 \leq -6+3 & \text{propiedad 1 de inecuaciones} \\
-5x+0 \leq -6+3 & \text{propiedad del inverso aditivo} \\
-5x \leq -3 & \text{propiedad modulativa de la suma} \\
(-1)(-5x) \geq (-1)(-3) & \text{propiedad 3 de inecuaciones} \\
(\frac{1}{5})5x \geq (\frac{1}{5})3 & \text{propiedad 2 de inecuaciones} \\
1x \geq \frac{3}{5} & \text{propiedad del inverso multiplicativo} \\
x \geq \frac{3}{5} & \text{propiedad modulativa del producto}
\end{array}$$

En este caso la solución es el conjunto de los números *x* tales que $x \geq \frac{3}{5}$, es decir, la solución es el intervalo $[\frac{3}{5}, \infty)$. Obsérvese que el intervalo es cerrado en $\frac{3}{5}$

La gráfica correspondiente es:

Actividad Nº 1: Aplicando las propiedades verificá la ley de tricotomía en las siguientes desigualdades:

i) $-2x + 7 > 3x + 5$
ii) $2x + 7 = 3x + 5$
iii) $2x + 7 < 3x + 5$

Para resolver la actividad, primero deberás resolver la ecuación y las inecuaciones, para poder comparar las soluciones.

Interpretación gráfica de la inecuación de 1° grado

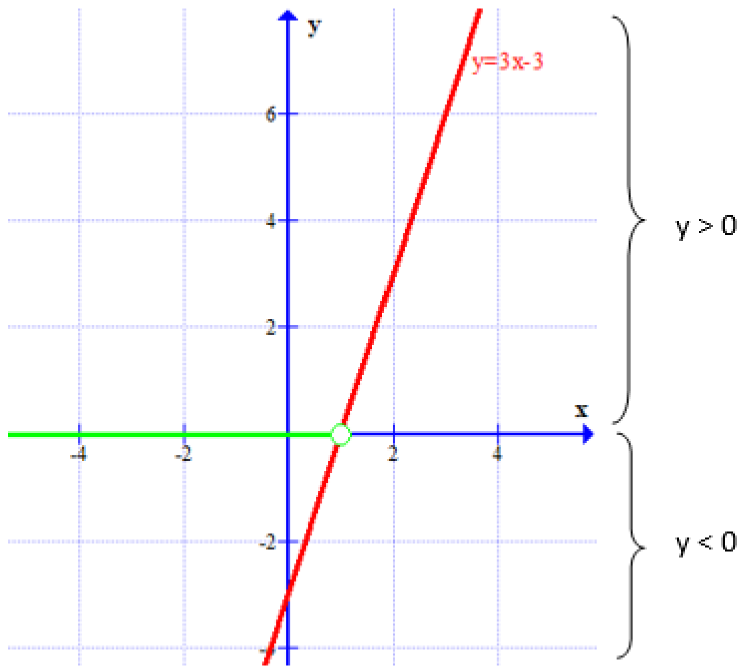
En los ejemplos anteriores, representamos las soluciones de las inecuaciones en la recta real, pero ¿sería posible hallar gráficamente la solución de este tipo de inecuaciones?

Por ejemplo: en $3x+1<4$ la solución fue $(-\infty; 1)$

Para resolverla gráficamente, en primer lugar, compararemos con 0:

$$3x + 1 - 4 < 4 - 4 \rightarrow 3x - 3 < 0$$

La inecuación tiene una recta asociada, es $y = 3x - 3$, si la representamos gráficamente:



$Si\ y = 3x - 3 < 0 => y < 0,$ indica que la función debe estar debajo del eje x, podemos ver en el gráfico, que los valores de x < 1 representan el conjunto de valores de x, para los que se cumple: y < 0 (Conjunto de negatividad)

Inecuaciones de segundo grado con una incógnita

Resolver una inecuación significa encontrar un conjunto de variación de x, llamado *conjunto solución de la inecuación*, talque todos los valores de x, satisfacen la relación de desigualdad $P(x) < Q(x)$.

Generalmente la solución de una inecuación es un conjunto finito de intervalos, mientras que la solución de una ecuación es un conjunto finito de números.

Veremos a continuación, algunos ejemplos:

Resolución de inecuaciones de 2° grado

RESOLUCIÓN DE INECUACIONES CUADRÁTICAS

Para poder entender el mecanismo de resolución de inecuaciones de orden superior y de inecuaciones fraccionarias, es necesario que entiendan el siguiente razonamiento:

Si se multiplican dos números Reales, A y B, según la regla de los signos de la multiplicación se cumple lo siguiente:

A	B	A.B
+	+	+
+	-	-
-	+	-
-	-	+

Como podemos observar, hay dos posibilidades para que el resultado sea negativo y dos para que sea positivo.

Si en vez de utilizar el signo, usáramos desigualdades, sabiendo que para que un N° sea positivo deberá ser mayor a cero y negativo, menor a cero. Resulta:

A	B	A.B
A>0	B>0	A.B>0
A>0	B<0	A.B<0
A<0	B>0	A.B<0
A<0	B<0	A.B>0

Ejemplo 1: Resolver la siguiente inecuación:

$$x^2 - 2x - 3 \geq 0$$

Solución

Primero calculamos los valores para los que se cumple la igualdad. Para ello, cambiamos la desigualdad por una igualdad. De este modo tendremos una ecuación de segundo grado cuyas raíces determinan los extremos de los intervalos de las soluciones de la inecuación:

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \begin{cases} 6/2 = 3 \\ -2/2 = -1 \end{cases}$$

Escribimos de manera factorizada la expresión cuadrática:

$$(x-3)(x+1) \geq 0$$

Si tenemos en cuenta la regla de los signos, y el cuadro que vimos al principio, resultará:

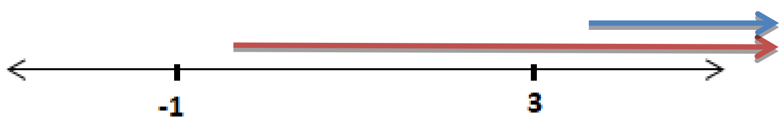
$(x-3)$	$(x+1)$	$(x-3)(x+1)$
$(x-3)\geq 0$	$(x+1)\geq 0$	$(x-3)(x+1)\geq 0$
$(x-3)\geq 0$	$(x+1)\leq 0$	$(x-3)(x+1)\leq 0$
$(x-3)\leq 0$	$(x+1)\geq 0$	$(x-3)(x+1)\leq 0$
$(x-3)\leq 0$	$(x+1)\leq 0$	$(x-3)(x+1)\geq 0$

Como podemos ver, existirán dos conjuntos que satisfacen la igualdad.

A continuación, resolveremos las inecuaciones y buscaremos la intersección para obtener los valores que verifican los signos que se buscan para cumplir con el del producto.

Llamaremos solución, **SA,** al conjunto que verifica:

$(x-3)\geq 0$	$\wedge$	$(x+1)\geq 0$
$x\geq 3$	$\wedge$	$x\geq -1$



Los puntos que verifican a ambas inecuaciones, se obtienen haciendo la intersección de los conjuntos, es la parte de la recta que se pinta de dos colores, y como el extremo está incluido en cada conjunto, resulta:

$$SA=[3,+\infty)$$

De igual manera, buscamos al otro conjunto que verifica la otra regla de signos:

Llamaremos solución, **SB,** al conjunto que verifica:

$(x-3)\leq 0$	$\wedge$	$(x+1)\leq 0$
$x\leq 3$	$\wedge$	$x\leq -1$

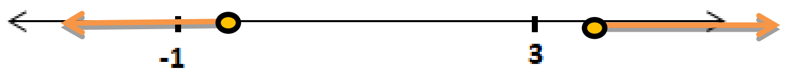
Los puntos que verifican a ambas inecuaciones, se obtienen haciendo la intersección de los conjuntos, es la parte de la recta que se pinta de dos colores, y como el extremo está incluido en cada conjunto, resulta:

$$SB = (-\infty, -1]$$

Como podemos observar, los conjuntos obtenidos, SA y SB, satisfacen con el signo del producto de factores de la inecuación, no poseen elementos en común, y ambos forman la solución final, es decir su Unión **(SA U SB),** es el conjunto solución**.**

Por lo tanto: **SF = SA U SB =** $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$

Se representa gráficamente:



Comprobamos:

Escogemos un número al azar de cada intervalo (por ejemplo, x =−2, x=0 y x=4) y comprobamos si para alguno de estos valores se cumple la inecuación. No importa cuál escogemos puesto que el signo de la inecuación se mantiene constante en cada intervalo.

$$-2 \rightarrow \quad (-2)^2 - 2(-2) - 3 \geq 0 \quad \rightarrow \quad 4 + 4 - 3 = 5 \geq 0$$

$$0 \rightarrow \quad (0)^2 - 2(0) - 3 \geq 0 \quad \rightarrow \quad -3 \ngeq 0$$

$$4 \rightarrow \quad (4)^2 - 2(4) - 3 \geq 0 \quad \rightarrow \quad 16 - 8 - 3 = 5 \geq 0$$

Por tanto, la inecuación se verifica en dos de los intervalos:

$$x \in (-\infty, \ -1] \ \cup \ [3, \ +\infty)$$

donde los corchetes indican que los extremos de los intervalos están incluidos (es en ellos donde se da la igualdad de la inecuación).

Ejemplo 2: Resolver la siguiente inecuación:

$$-2x^2 + 2x > -4$$

Solución

Como lo primero que calculamos son los valores para los que se cumple la igualdad, deberemos aplicar propiedades para que quede igualado a cero.

$$-2x^2 + 2x + 4 = 0$$

De este modo tendremos una ecuación de segundo grado cuyas raíces determinan los extremos de los intervalos de las soluciones de la inecuación:

$$-2x^2 + 2x + 4 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4.(-2).4}}{2.(-2)} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{-4} = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$$

Escribimos de manera factorizada la expresión cuadrática, recordando de multiplicar el coeficiente principal (-2) a los factores:

$$-2.(x-2)(x+1) > 0$$

La manera más sencilla de hacer el análisis de los signos, y poder trabajar como lo hicimos en el ejemplo anterior, multiplicamos a ambos miembros por el opuesto del inverso multiplicativo del coeficiente, es decir, multiplicamos a ambos miembros por $-\frac{1}{2}$, recordando que al hacerlo el sentido de la desigualdad, cambia.

$$-2.\ \left(-\frac{1}{2}\right)(x-2)(x+1) < 0.\left(-\frac{1}{2}\right)$$

Resultando: $(x-2)(x+1) < 0$

Si tenemos en cuenta la regla de los signos, y el cuadro que vimos al principio, resultará:

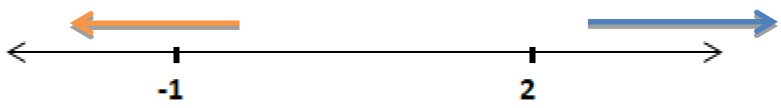
$(\boldsymbol{x-2})$	$(\boldsymbol{x+1})$	$(\boldsymbol{x-2})(\boldsymbol{x+1})$
$(x-2) > 0$	$(x+1) > 0$	$(x-2)(x+1) > 0$
$(x-2) > 0$	$(x+1) < 0$	$(x-2)(x+1) < 0$
$(x-2) < 0$	$(x+1) > 0$	$(x-3)(x+1) < 0$
$(x-2) < 0$	$(x+1) < 0$	$(x-2)(x+1) > 0$

Como podemos ver, existirán dos conjuntos que satisfacen la igualdad.

A continuación, resolveremos las inecuaciones y buscaremos la intersección para obtener los valores que verifican los signos que se buscan para cumplir con el del producto.

Llamaremos solución, **SA,** al conjunto que verifica:

$(x-2) > 0$	$\wedge$	$(x+1) < 0$
$x > 2$	$\wedge$	$x < -1$



Los puntos que verifican a ambas inecuaciones, se obtienen haciendo la intersección de los conjuntos, es la parte de la recta que se pinta de dos colores, como se ve en la recta, no hay elementos en común, por lo que se considera un conjunto vacío $\emptyset$:

$$SA = \emptyset$$

De igual manera, buscamos al otro conjunto que verifica la otra regla de signos:

Llamaremos solución, **SB,** al conjunto que verifica:

$(x-2) < 0$	$\wedge$	$(x+1) > 0$
$x < 2$	$\wedge$	$x > -1$

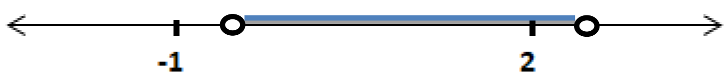
Los puntos que verifican a ambas inecuaciones, se obtienen haciendo la intersección de los conjuntos, es la parte de la recta que se pinta de dos colores, y como el extremo no está incluido en ningún conjunto, resulta:

$$SB = (-1{,}2)$$

Como podemos observar, los conjuntos obtenidos, SA y SB, satisfacen con el signo del producto de factores de la inecuación, no poseen elementos en común, y ambos forman la solución final, es decir su Unión **(SA U SB),** es el conjunto solución**.**

Por lo tanto: **SF = SA U SB =** $\emptyset \cup (-1{,}2) = (-1{,}2)$

Se representa gráficamente:



Comprobamos:

Escogemos un número al azar de cada intervalo (por ejemplo, =−2, x=0 y x=4) y comprobamos si para alguno de estos valores se cumple la inecuación. No importa cuál escogemos puesto que el signo de la inecuación se mantiene constante en cada intervalo.

Por tanto, la inecuación se verifica en dos de los intervalos:

$$x \in (-1, 2)$$

donde los paréntesis indican que los extremos de los intervalos no están incluidos.

RESOLUCIÓN DE INECUACIONES RACIONALES

INECUACIONES RACIONALES - SIN VALOR ABSOLUTO

Ejemplo 1: determinar el conjunto solución de la inecuación racional $\frac{x-2}{x+3} \geq 2$

Solución

Para resolver este tipo de inecuaciones lo que debemos hacer es comparar con cero la expresión del 1° miembro, lo cual resulta sencillo, ¨pasando¨ el 2 al 1° miembro: $\frac{x-2}{x+3} - 2 \geq 0$

Ahora que conseguimos comparar con cero, debemos realizar la diferencia que aparece en el primer miembro ¿por qué? Para expresar dicha diferencia como cociente y poder aplicar la regla de

los signos: $\frac{x-2}{x+3} - 2 \geq 0 \rightarrow \frac{x-2-2.(x+3)}{x+3} \geq 0 \rightarrow \frac{x-2-2x-6}{x+3} \geq 0 \rightarrow \frac{-x-8}{x+3} \geq 0$

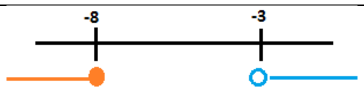
Si observan la desigualdad que resultó, tenemos un cociente mayor o igual que cero, nos preguntamos **¿Qué signos deben tener numerador y denominador para que el cociente sea mayor o igual que cero?** Y por regla de los signos resulta:

$$[-x-8 \geq 0 \wedge (se\ lee\ y)\ x+3 > 0] \quad \vee (se\ lee\ o)\ [-x-8 \leq 0 \wedge x+3 < 0]$$

Observe en este caso, que la expresión del numerador puede ser **igual a cero,** pero la expresión del denominador **no, pues nunca debe ser cero.**

Desde este momento, tal expresión no es desconocida para ustedes, se debe hallar el conjunto solución como lo han hecho para la inecuación de 2°:

$[-x-8 \geq 0 \wedge x+3 > 0]$ $-x \geq 8 \wedge x > -3$ Tener presente que se tiene $-x \geq 8 \rightarrow x \leq -8$ $x \leq -8 \wedge x > -3$	$[-x-8 \leq 0 \wedge x+3 < 0]$ $-x \leq 8 \wedge x < -3$ Tener presente que se tiene $-x \leq 8 \rightarrow x \geq -8$ $x \geq -8 \wedge x < -3$

 $\emptyset = vacío$	 $[-8;-3)$

$$S_f = [-8;\ -3) \cup \emptyset = [-8;\ -3)$$

Ejemplo 2: Determinar el conjunto solución de la inecuación racional $\boldsymbol{\frac{x-2}{x+3} \leq -2}$

Solución

Nuevamente por lo que dijimos antes, debemos comparar con cero la expresión del 1° miembro, lo cual resulta sencillo, ¨pasando¨ el 2 al 1° miembro: $\boldsymbol{\frac{x-2}{x+3} + 2 \leq 0}$

Ahora que conseguimos comparar con cero. Debemos realizar la suma que aparece en el primer miembro ¿por qué? Para expresar dicha suma como cociente y poder aplicar la regla de los signos:

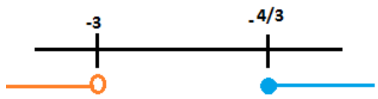
$$\boldsymbol{\frac{x-2}{x+3} + 2 \leq 0 \rightarrow \frac{x-2+2.(x+3)}{x+3} \leq 0 \rightarrow \frac{x-2+2x+6}{x+3} \leq 0 \rightarrow \frac{3x+4}{x+3} \leq 0}$$

Si observan la desigualdad que resultó, tenemos un cociente menor o igual que cero, nos preguntamos **¿Qué signos deben tener numerador y denominador para que dicho cociente sea menor o igual que cero?** Y por regla de los signos resulta:

$$[3x+4 \leq 0\ \wedge\ x+3 > 0] \quad \vee \quad [3x+4 \geq 0\ \wedge\ x+3 < 0]$$

Observe en este caso, que la expresión del numerador puede ser **igual que cero,** pero la expresión del numerador **no, pues nunca debe ser cero.**

Desde este momento, tal expresión no es desconocida para ustedes, se debe hallar el conjunto solución como lo han hecho para la inecuación de 2°:

$[3x+4 \leq 0\ \wedge\ x+3 > 0]$ $3x \leq -4\ \wedge\ x > -3$ $x \leq -4/3\ \wedge\ x > -3$  $(-3;-4/3]$	$[3x+4 \geq 0\ \wedge\ x+3 < 0]$ $3x \geq -4\ \wedge\ x < -3$ $x \geq -4/3\ \wedge\ x < -3$  $\emptyset = vacío$

$$S_f = \left(-3; -\frac{4}{3}\right] \cup \emptyset = \left(-3; -\frac{4}{3}\right]$$

INECUACIONES RACIONALES - CON VALOR ABSOLUTO

Recordando conceptos anteriores….

En este caso debemos tener presente las propiedades del valor absoluto, para resolver una inecuación de la forma $\left|\frac{x\mp a}{x\mp b}\right| \le k \;\; o \quad \left|\frac{x\mp a}{x\mp b}\right| \ge k$

1- Si tenemos una inecuación de la forma $|x| \le k \;\leftrightarrow\; -k \le x \le k \;\leftrightarrow\; -k \le x \;\wedge\; x \le k,\; k > 0$
2- Si tenemos una inecuación de la forma $|x| \ge k \quad \leftrightarrow \qquad x \le -k \;\; \vee x \;\ge k,\; k > 0$

Ejemplo 1: Determinar el conjunto solución de la inecuación racional $\left|\frac{x-2}{x+3}\right| \ge \mathbf{2}$

Observando el ejercicio, vemos que dicha expresión responde a la forma $\left|\frac{\boldsymbol{x\mp a}}{\boldsymbol{x\mp b}}\right| \ge \boldsymbol{k},$ por lo cual debemos desarrollar dicha expresión para **“deshacernos”** del valor absoluto, ¿cómo? Pues aplicando la propiedad 2, mencionada antes:

$$\left|\frac{\boldsymbol{x-2}}{\boldsymbol{x+3}}\right| \ge \mathbf{2} \rightarrow \frac{\boldsymbol{x-2}}{\boldsymbol{x+3}} \le \mathbf{-2} \;\vee (\boldsymbol{se\ lee\ o})\;\; \frac{\boldsymbol{x-2}}{\boldsymbol{x+3}} \ge \mathbf{2}$$

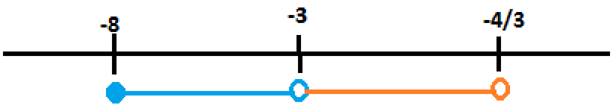
Ahora que nos hemos quitado el valor absoluto, debemos trabajar ambas expresiones como se explicó en el caso anterior **(Inecuación racional sin valor absoluto).**

El conjunto solución de dicha actividad será la UNIÓN de ambas expresiones, pués recordemos que el símbolo " ∨ " significa unión.

Ambas desigualdades ya las hemos resuelto, en los ejemplos 1 y 2, vistos al inicio; donde se obtuvo el conjunto solución:

$\frac{\boldsymbol{x-2}}{\boldsymbol{x+3}} \le \mathbf{-2};\;\; S_f = \left(-3; -\frac{4}{3}\right]$ $\qquad$ $\frac{\boldsymbol{x-2}}{\boldsymbol{x+3}} \ge \mathbf{2};\quad S_f = [-8;\; -3)$

Ahora la solución final será la unión de ambos intervalos, para lo cual podemos ayudarnos con una gráfica:



Como podemos observar, la unión de ambos intervalos será:

$$S_f = [-8;\; -3) \cup \left(-3; -\frac{4}{3}\right] = [\mathbf{-8};\; \mathbf{-4/3}] - \{\mathbf{-3}\}$$

Ejemplo 2: Determinar el conjunto solución de la inecuación racional $\left|\frac{x+1}{x-2}\right| \leq \mathbf{1}$

Observando el ejercicio, vemos que dicha expresión responde a la forma $\left|\frac{x\mp a}{x\mp b}\right| \leq \boldsymbol{k},$ por lo cual debemos desarrollar dicha expresión para **"deshacernos"** del valor absoluto, ¿cómo? Pues aplicando la propiedad 1, mencionada antes:

$$\left|\frac{\boldsymbol{x+1}}{\boldsymbol{x-2}}\right| \leq \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{-1} \leq \frac{\boldsymbol{x+1}}{\boldsymbol{x-2}} \leq \mathbf{1} \rightarrow \quad \mathbf{-1} \leq \frac{\boldsymbol{x+1}}{\boldsymbol{x-2}} \quad \wedge \quad (\boldsymbol{se\ lee\ y}) \quad \frac{\boldsymbol{x+1}}{\boldsymbol{x-2}} \leq \mathbf{1}$$

Ahora debemos trabajar esas dos inecuaciones por separado, obtener el con junto solución de cada una de ellas, y realizar una **INTERSECCIÓN**, pués la relación es "∧".

De $\mathbf{-1} \leq \frac{x+1}{x-2}$ $\boldsymbol{obtendremos\ la\ S_A}$: $\frac{x+1}{x-2} \geq \mathbf{-1} \rightarrow \frac{x+1}{x-2} + \mathbf{1} \geq \mathbf{0} \rightarrow \frac{x+1+(x-2)}{x-2} \geq \mathbf{0} \rightarrow \frac{2x-1}{x-2} \geq \mathbf{0}$

$$[2x-1 \geq 0 \wedge x-2>0] \quad \vee \quad [2x-1 \leq 0 \wedge x-2<0]$$

$[2x-1 \geq 0 \wedge x-2>0]$ $2x \geq 1 \wedge x>2$ $x \geq 1/2 \wedge x>2$  $[2;+\infty)$	$[2x-1 \leq 0 \wedge x-2<0]$ $2x \leq 1 \wedge x<2$ $x \leq 1/2 \wedge x<2$  $(-\infty;1/2]$

$$S_A = (-\infty;1/2] \cup [2;+\infty)$$

De $\frac{x+1}{x-2} \leq \mathbf{1}$ $\boldsymbol{obtendremos\ la\ S_B}$: $\frac{x+1}{x-2} \leq \mathbf{1} \rightarrow \frac{x+1}{x-2} - \mathbf{1} \leq \mathbf{0} \rightarrow \frac{x+1-(x-2)}{x-2} \leq \mathbf{0} \rightarrow \frac{3}{x-2} \leq \mathbf{0}$

$$[3 \geq 0 \wedge x-2<0] \quad \vee \quad [3 \leq 0 \wedge x-2>0]$$

$[3 \geq 0 \wedge x-2<0]$ $Verdadero \wedge x<2$ $x<2$	$[3 \leq 0 \wedge x-2>0]$ $como$ $3 \leq 0$ es falso, esta opción se descarta $\emptyset = vacío$

$$S_B = (-\infty;2) \cup \emptyset = (-\infty;2)$$

Por lo tanto, la solución final será:

$$\boldsymbol{S_f} = \boldsymbol{S_A} \cap \boldsymbol{S_B} = \left[\left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty)\right] \cap (-\infty; \mathbf{2}) = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$$

Trabajo de reafirmación conceptual y procedimental

Las siguientes actividades están pensadas para que las realicen de manera individual y controlen los resultados mediante el uso de algún soporte tecnológico:

1. Escriban los siguientes conjuntos en forma de intervalos y represéntalos gráficamente:
$A = \{x \in R / -7 < x < 6\}$ $\quad$ $B = \{x \in R / -\infty < x \leq 1\}$
$C = \{x \in R / x > -2\}$ $\quad$ $D = \{x \in R / -3 \leq x \leq 5\}$

2. Resuelvan las siguientes inecuaciones, escriban cada resultado como intervalo y represéntenlos gráficamente:
   $a)\ 3x > 12$ $\quad$ $b)\ 3 - 5x > 5$ $\quad$ $c)\ -5 + 3x \leq 6x - 1$
   $d)\ 3(2 - 3x) < 4(1 - 4x)$ $\quad$ $e)\ 4x - \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2}x$

3. Dadas las inecuaciones, hallen los valores que las verifican y grafiquen el conjunto solución. Definan, si existen, cotas, supremo, ínfimo, elemento máximo y elemento mínimo de cada conjunto solución.

Inecuaciones de 1° grado con tres miembros

$a) -6 < 3x + 3 \leq 10$ $\qquad$ $b) 2x - 3 < 5x + 3 < 2x + 3$

Inecuaciones de 2° grado

$c) 18x - 3x^2 > 0$ $\qquad$ $d) x^2 + 7x + 12 < 0$

Inecuaciones fraccionarias

$e) \dfrac{3x-1}{2+x} > 3$ $\qquad$ $f) \dfrac{4x}{x-5} \leq 2$

VALOR ABSOLUTO

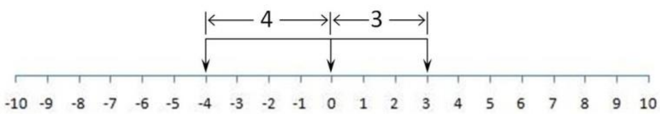
El **valor absoluto** desempeña un papel muy importante en el cálculo diferencial; por ejemplo, nos permite cuantificar la proximidad que pueden tener dos números, la cual llamaremos distancia entre los números. La noción de distancia entre números es la base para hablar de límites, lo cual, a su vez, es fundamental para el importantísimo concepto de derivada.
El valor absoluto de un número real *x*, positivo o negativo, es el número x de signo positivo; y si x =0, el valor absoluto será nulo. En términos precisos, lo definimos como sigue.

Definición
Se llama valor absoluto o módulo de un número real, al mismo número si es positivo o cero, y a su opuesto si es negativo. Por lo tanto, el módulo de un n° real es siempre un n° no negativo.

Es decir: $|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$

Por ejemplo: $|5| = 5 \qquad |-3{,}1| = 3{,}1$

La distancia (no negativa) en la recta real entre el cero y el número real *a es el valor absoluto de a,* se escribe $|a|$



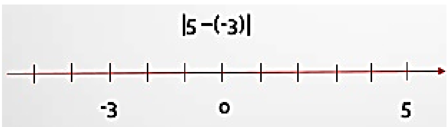
$|-4| = 4$ La distancia entre -4 y 0 es 4.

$|3| = 3$ La distancia entre 3 y 0 es 3.

Definición: Se llama **distancia** entre los reales ***x*** e ***y*** al número real no negativo:

$$d(x, y) = |x - y|$$

Ejemplo: la distancia entre 5 y -3 es: $|5 - (-3)| = |-3 - 5| = 8$



Propiedades:

El valor absoluto tiene las siguientes propiedades:

1. Para todo real *x* se tiene $|x| \geq 0$. Además, $|0| = 0$ y *x* = 0 es el único real *x* que cumple $|x| = 0$, es decir $|x| = 0 \leftrightarrow x = 0$
2. Para todo real *x*, se tiene $|x| = |-x|$
3. Para cualesquiera reales *x*, *y*, se tiene $|x.y| = |x|.|y|$
4. Para cualesquiera reales *x*, *y*, se tiene $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, con $y \neq 0$
5. Para cualesquiera reales *x*, *y*, se cumple la desigualdad $|x+y| \leq |x| + |y|$, conocida como **desigualdad triangular**.
6. Para todo real *x*, se cumple la desigualdad $|x| < k \leftrightarrow -k < x < k, \forall k > 0$
7. Para todo real *x*, se cumple la desigualdad $|x| > k \leftrightarrow x > k \;\; \text{v} \;\; x < -k, \forall k > 0$

Observación:

Existen tres propiedades de los números reales que son de mucha utilidad al momento de resolver inecuaciones:

- $\sqrt[n]{x^n} = x, si\ x\ es\ un\ n°\ natural.$ Pero ¿qué pasa cuando $\sqrt{(-2)^2}$? Entonces se considera que $\sqrt[n]{x^n} = |x|, \forall x \in R$
- $como \begin{cases} a^2 = |a|^2 \\ b^2 = |b|^2 \end{cases}$ entonces $|a|^2 < |b|^2 \rightarrow a^2 < b^2, \forall a, b \in R$
- $como \begin{cases} a^2 = |a|^2 \\ b^2 = |b|^2 \end{cases}$ entonces $|a|^2 > |b|^2 \rightarrow a^2 > b^2, \forall a, b \in R$

Actividad Nº 5: Determina, en cada caso, el conjunto solución:
$a)|2x-5| = 7$ $b)|x+2| < 6$ $c)3 < |x-5| \leq 7$

<u>ENTORNO</u>

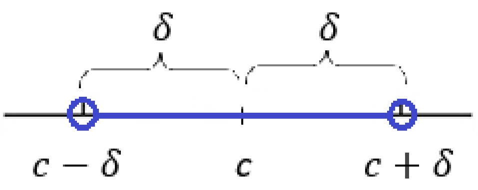
Reiteradamente hablaremos de intervalo de centro *c* y radio δ o *entorno de c* para indicar los x que se encuentran a una distancia de *c* menos que δ , esto resulta ser un intervalo $(c-\delta; c+\delta)$ y de *entorno reducido de c* cuando se desee excluir el punto *c del intervalo, es decir, cuando se trate de la unión de dos intervalos* $(c-\delta; c)U(c; c+\delta)$

<u>Definición:</u>

Se llama ***entorno*** del punto c de semiamplitud δ , al conjunto de puntos que verifican la siguiente desigualdad: $c - \delta < x < c + \delta$, donde δ es un número positivo arbitrariamente pequeño y se lo expresa $E(c, \delta)$.

<u>Simbólicamente</u>: $E(c,\delta) = \{x / c - \delta < x < c + \delta\}$

<u>Representación gráfica</u>:

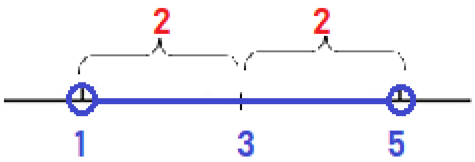


Como podemos ver en el gráfico, el intervalo está formado por todos los puntos que tienen una distancia a **c** menor a δ. Si para determinar la distancia entre dos puntos, usamos valor absoluto, la distancia entre x y c resulta: $|x-c|$ y si además debe ser menor al radio o semiamplitud: : $|x-c|<\delta$.

Otra manera de definir: $E(c,\delta)=\{x/|x-c|<\delta\}=\{x/-\delta<x-c<\delta\}$

Por ejemplo: $|x-3|<2 \rightarrow -2<x-3<2 \rightarrow 1<x<5$

Lo que significa que el intervalo (1;5) es un Entorno de centro 3 y semiamplitud 2, es decir está formado por todos los x cuya distancia a 3 es menor a 2: $E(3{,}2)$



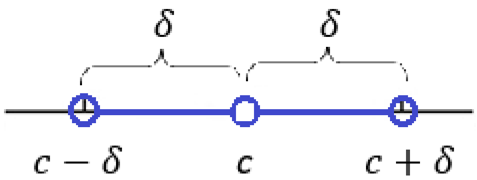
ENTORNO REDUCIDO

Dado un entorno en que el centro no pertenece al conjunto se denomina ***entorno reducido*** del punto c de semiamplitud δ , se lo expresa $E´(c,\delta)$.

Simbólicamente:

$E´(c,\delta)=\{x\in R/c-\delta<x<c+\delta \; y \; x\neq c\}$, donde δ es un número positivo arbitrariamente pequeño.

Representación gráfica:



Para definir, mediante el uso de valor absoluto, aplicando la definición de distancia.

Habíamos expresado el entorno del punto ***c*** como $|x-c|<\delta$, pero como en el entorno reducido x no puede tomar el valor del centro, significa que $x\neq c$, $es\ decir\ que$ $|x-c|\neq 0$ es equivalente expresarlo como $0<|x-c|$, es decir, el cero a la izquierda significa que en el intervalo, x puede tomar cualquier valor menos el de c.

Otra manera de definir: $E´(c,\delta)=\{x\in R/0<|x-c|<\delta\}$

Inecuaciones con valor absoluto

Actividad Nº 5: Dadas las inecuaciones:

a) $|x-1|=3$ b) $\left|\frac{-6}{x+3}\right|<2$ c) $|x^2+2|>6$ d) $|x-1|<|x+1|$ e) $0<\left|\frac{x-3}{2}\right|<2$

i. Halla los valores de x para los cuales se verifica cada expresión.
ii. Grafica la solución.
iii. Analiza si expresa algún entorno. De ser así calcula la amplitud e indica el centro y el radio.

Definiciones importantes:

Punto interior de un conjunto:

Definición: Sean $C \subseteq$ R y $a \in C$, al punto *a* lo llamaremos punto interior del conjunto C sí y sólo sí, existe al menos un entorno de *a* incluido en el conjunto C.

Simbólicamente:

$$\boldsymbol{a} \text{ es un punto interior a } \boldsymbol{C} \iff a \in C \wedge \exists E(a) / E(a) \subseteq C$$

Ejemplos:

- Sea $A\left(-2, \frac{1}{2}\right]$ el punto $a = \frac{1}{2}$ no es punto interior porque no existe un $\delta > 0$, $donde\ el\ E(\frac{1}{2}, \delta)$ esté totalmente incluido en el conjunto A.
- Cualquier número real es interior al conjunto R.
- Un número racional no es interior al conjunto Q, pues en todo entorno de un número racional habrá números irracionales que no pertenecen a ***Q***.

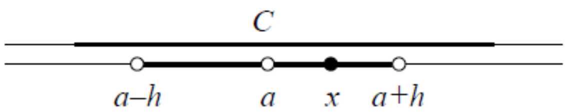
Punto de Acumulación:

Definición: Sean $C \subseteq$ R y $x \in$ C , al punto *a* lo llamaremos punto de acumulación del conjunto *C* sí y sólo sí, todo entorno reducido de *a* contiene por lo menos un elemento $x \neq a$ en el conjunto C.

Simbólicamente:

$$\boldsymbol{a} \text{ es un punto de acumulación de } \boldsymbol{C} \iff \forall E'(a) : \exists x / x \in C \wedge x \in E'(a)$$

$$\text{o bien, } \boldsymbol{a} \text{ es un punto de acumulación de } \boldsymbol{C} \iff \forall E'(a) : E'(a) \cap C \neq \varnothing$$

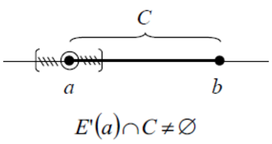


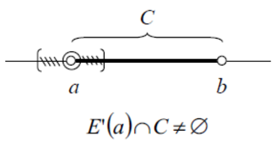
Observación: El punto de acumulación a del conjunto C no es necesario que dicho punto sea elemento del conjunto C.

Ejemplos:

- Si A = [-1,5] entonces 2 es un punto de acumulación de A, es decir: existe un entorno de 2 que tienen puntos de intersección con A.

- Si el conjunto ***C*** es un intervalo abierto o cerrado, todos sus puntos serán de acumulación, inclusive los extremos en caso de que ***C*** fuera un intervalo abierto, aunque según se sabe no pertenezcan a ***C***.





TEMAS DE EVALUACIÓN:

DEFINIR INTERVALOS LIMITADOS E ILIMITADOS.

DEFINIR COTAS, EXTREMOS Y ELEMENTOS DE UN CONJUNTO

DEFINIR VALOR ABSOLUTO. ENUNCIAR AL MENOS 5 PROPIEDADES

DEFINIR ENTORNO Y ENTORNO REDUCIDO. SIMBÓLICAMENTE E INTERPRETAR SU SIGNIFICADO GEOMÉTRICO.

DEFINIR Y DAR EJEMPLOS DE PUNTO INTERIOR Y PUNTO DE ACUMULACIÓN.