UNIDAD TEMÁTICA I: FUNCIONES

Uno de los conceptos más importante de la matemática, es sin duda el de *función*. En este curso nos limitaremos al estudio *funciones de una variable real*.

En términos poco formales podemos decir que una *función* es una regla u operación, que asigna a cada número real de un conjunto, un único número real.

Por ejemplo:

La razón entre cierto número y el doble de su siguiente: $\frac{x}{2(x+1)}$

El doble de la raíz cuadrada de la longitud del hilo de un péndulo: $2\sqrt{l}$

El producto de la masa por la aceleración de la gravedad: *m.g*

Como podemos observar en estas *expresiones algebraicas*, las letras representan *variables* y tomarán valores pertenecientes al conjunto de números reales. Pero como vemos en estos ejemplos, no siempre la regla es aplicable a todo número real. El conjunto de los números a los cuales podemos aplicar la regla lo denominaremos Dominio.

Por ejemplo:

En $\frac{x}{2(x+1)}$, deberá ser $2(x+1) \neq 0$, es decir $x \neq -1$, por lo que x podrá tomar valores reales distintos de -1. Simbólicamente seria $\forall x \in R - \{-1\}$

En $2\sqrt{l}$, *l* deberá ser mayor o igual a cero. Simbólicamente seria $\forall\, l \in R_0^+$

Resulta conveniente introducir una notación adecuada, que facilite la escritura y permita referirnos a las funciones en forma general. Para ello es habitual asignar a la *variable* con la letra ***x*** y designar a las *expresiones algebraicas* con las letras *f, g, h.* Escribiendo *f(x)* para simbolizar el conjunto de reglas u operaciones a realizar sobre el número ***x*** para obtener el numero ***y***, que asocia ***f*** con ***x*** y que simbolizamos con ***y = f(x),*** que solo tiene sentido con *x* que pertenece al *Dominio de f*.

Por lo tanto, nuestros ejemplos anteriores quedarían expresados así:

- $f(x) = \frac{x}{2(x+1)} \quad \forall x \in R - \{-1\}$
- $g(x) = 2\sqrt{x} \quad \forall x \in R_0^+$

En general, el Dominio se deberá restringir, para que la función tenga sentido al momento de reemplazar x, por un número.

Una vez definida la función y establecido el conjunto de valores que puede tomar x (Dominio); podemos establecer que la función quedará formada por todos los pares ordenados ***(x, y)***, donde el valor de x es el primer elemento y el segundo elemento es el valor ***f*** aplicada a ***x.***

Como sucede en cada uno de los ejemplos a cada valor que se le asigna a ***x***, por ***f*** se obtendrá un ***único*** valor de ***y***, es decir existe una relación de dependencia de ***y*** con respecto a ***x***. Por lo que a ***x*** se la llama *variable independiente*; y a ***y*** se la llama *variable dependiente.*

DEFINICIÓN:

Dados los conjuntos A y B con $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$

***f* es una función de A en B si y solo si *f* es un relación de A en B tal que todo elemento de A tiene un único correspondiente en B.**

-Simbolizaremos así:

$f \subset$ A x B (se lee A producto cartesiano B)

$$f \text{ es función de } A \text{ en } B \leftrightarrow \{\forall x \in A, \exists!\ y \in B / (x, y) \in f$$

Otra manera de definirlo:

$$f \text{ es función de } A \text{ en } B \leftrightarrow \{\forall x \in A, \forall\ y_1, y_2 \in B: (x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f \rightarrow y_1 = y_2$$

- Se denotará:

$f\colon\ A \rightarrow B$

$x \rightarrow f(x)$ *(a x se le asigna f(x))*

Y deberá tenerse en cuenta que:

1) Los elementos de f son pares ordenados de la forma *(x, f(x))*
2) *f* no es lo mismo que *f(x), f(x)* es la imagen de *x* por *f.*
3) con Dom. o D_f se denotará al Dominio de la función *f,* siendo *A* = D_f
4) el conjunto de los valores que toma y se llama ***Imagen de la función*** , se denota Im_f , siendo $Im_f \subset$ B

Hasta acá se introdujo de manera general los conceptos de relación, dominio y codominio, ya que se definió a la función como un caso particular de relación.

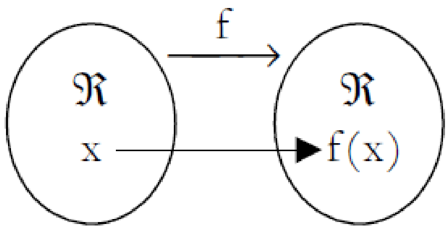
Desde este momento trabajaremos exclusivamente con las llamadas funciones reales de variable real, por lo que resulta esta nueva definición:

DEFINICIÓN:

Sean A y B dos subconjuntos no vacios de R

A toda función $f\colon A \rightarrow B$ se dirá que* es una *función real de variable real

Por lo que la frase " función real" indica que la variable independiente solo toma valores reales, denominádose "variable real" y resultando el conjunto dominio y codominio subconjuntos de R.



Dominio de definición o Máximo dominio

Como vimos en la definición, una función es una regla que permite asociar a cada elemento del dominio un único elemento del codominio. Por lo tanto, expresiones (reglas de cálculo) como:

$$f(x) = x^2 - 5x + 4 \qquad g(x) = 10^x \qquad h(x) = senx \qquad m(x) = \frac{3}{x-1}$$

No son funciones, porque no se prescribe los correspondientes dominios y codominios.

Definición:
Sea $f(x)$ una regla de cálculo. Se define el **Dominio de Definición** (o Máximo Dominio) de f como el más grande subconjunto de R donde la regla tiene sentido, esto es, donde se respetan las propiedades de los números reales y donde *f(x)* transforma reales en reales.

Observación: Dada una regla de cálculo f(x), si no se provee explícitamente dominio y codominio deberá trabajarse con el dominio de definición, en el cual está definida la regla de cálculo para todo número real, y lo denominaremos *Dom(f).*

Ejemplo:
Halla el Dominio de las siguientes funciones:

a) $y = 3x + 5$
b) $y = x^3 - 3x$
c) $y = \sqrt{2x - 6}$
d) $y = \frac{1}{x+3}$
e) $y = \frac{x-2}{x^2-4}$
f) $y = \frac{x-1}{|x|} + \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

Actividad N° 1: Halla analíticamente el dominio de las siguientes funciones:

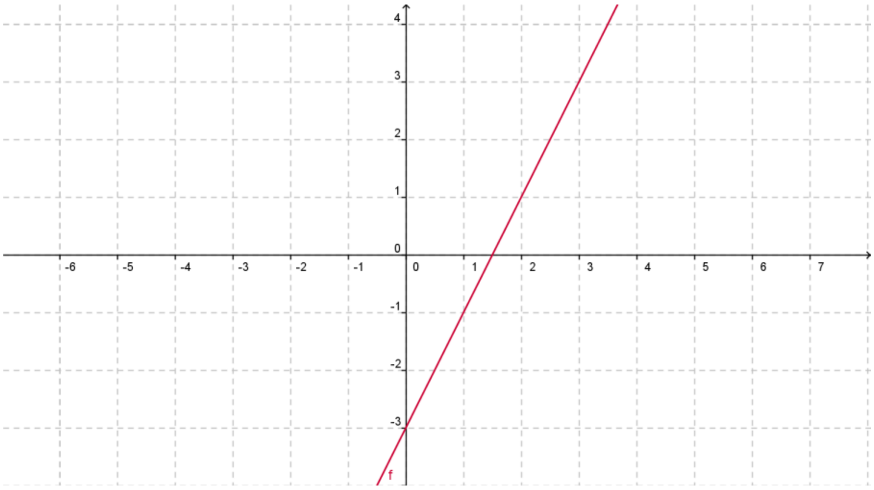
$a)\, f(x) = \dfrac{1}{x^4 - 1}$ $\qquad b)\, y = \ln\left(\dfrac{2x}{x+2}\right)$ $\qquad c)\, y = \sqrt{3x^2 - 4x + 1}$

$d)\, f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x^2 - 9}}$ $\qquad e)\, f(x) = \sqrt{\ln\left(\dfrac{x+1}{x^2 - 1}\right)}$ $\qquad f)\, f(x) = \dfrac{x+1}{x}\, \ln(x+1)$

Como trabajaremos con funciones cuyo dominio y recorrido son conjuntos de números reales (funciones de una variable real o bien funciones reales de una variable real), se las puede representar gráficamente en un sistema de ejes cartesianos ortogonales. Donde en el eje de las abscisas se ubican los valores del Dominio, y como los elementos de *f*, esta dado por pares ordenados *(x, f(x))* donde *y = f(x),* cada uno de los pares representa un punto, cuya unión resulta la gráfica de la función.

Por ejemplo:

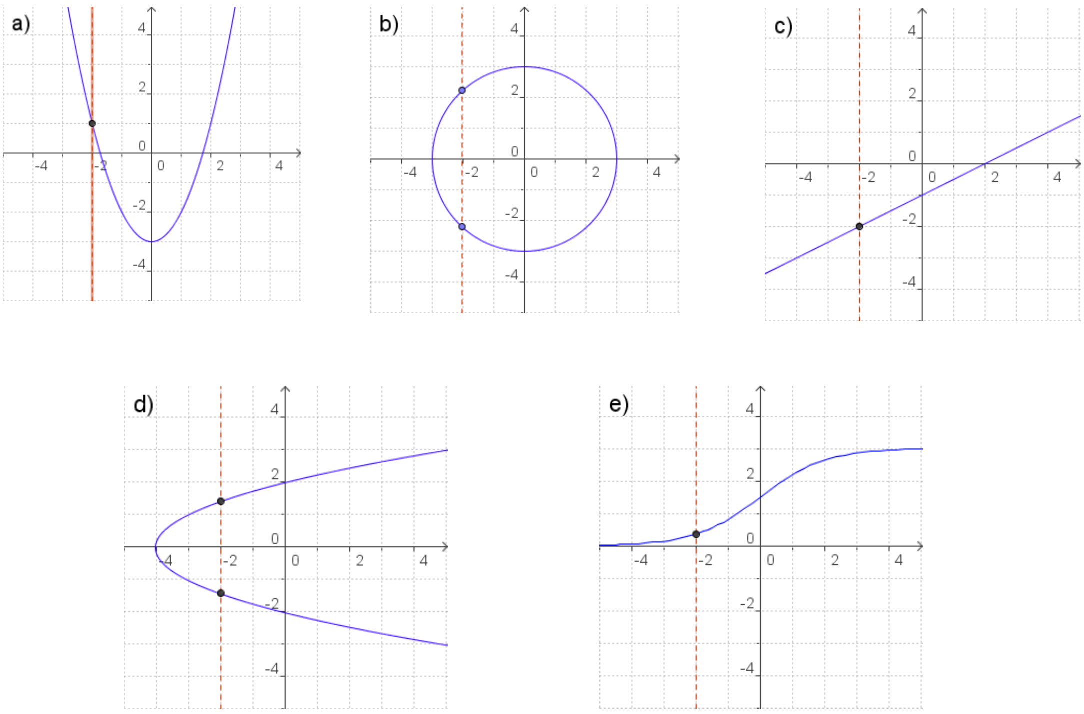
Sea $f : R \rightarrow R / f(x) = 2x - 3$



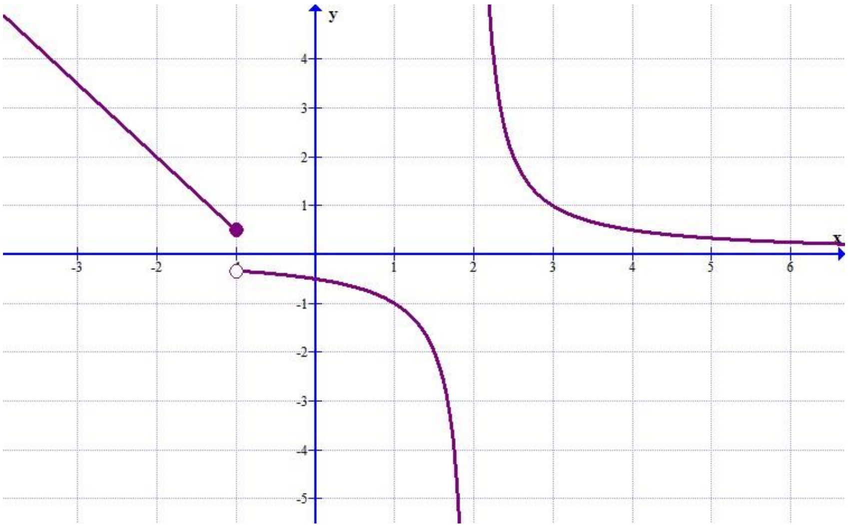
x	*f(x)*
-1	-5
0	-3
1	-1
2	1
3	3

<u>Actividad N° 2</u>:

De las siguientes gráficas, señala cuáles corresponden a una función y cuáles no. Justifica.



Actividad N°3: Dada la siguiente función $y = f(x)$



a) Determina el valor aproximado de $f(4), f(-2), f(-1), f(0), f(f(3))$
b) ¿En qué punto(s) f no está definida?
c) Determina el Dominio de f
d) Preimagen(es) de -0,1
e) Determina el recorrido o imagen de f
f) *Determina el valor x_a, tal que:*
   $f(x_a) = 0,\quad f(x_a) = -2\,,\quad f(x_a) = 1/2,\quad f(x_a) = 2$
g) *Por simple observación de una gráfica es posible resolver inecuaciones. ¿Cuál es el conjunto solución de la inecuación $f(x) \leq 0{,}5$?*
h) *Cuando se consideran valores de x suficientemente grandes ¿cuál es el comportamiento de f?*
i) ¿Cuáles son los ceros de la función?
j) Indique los intervalos de positividad y negatividad.

OPERACIONES CON FUNCIONES

Dadas dos funciones *u* y *v tales que* $u(x): R \rightarrow R$ y $v(x): R \rightarrow R$ *, se definen:*

Suma y resta: $f(x) = (u \pm v)(x) = u(x) \pm v(x) \quad \forall x \in\ Dm(u) \cap Dm(v)$

Producto: $f(x) = (u.v)(x) = u(x).v(x) \quad \forall x \in\ Dm(u) \cap Dm(v)$

Cociente: $f(x) = \left(\frac{u}{v}\right)(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \forall x \in\ Dm(u) \cap Dm(v)\ \ y\ v(x) \neq 0$

Potencia: $f(x) = u^v(x) = u(x)^{v(x)} \;\; \forall x \in \; Dm(u) \cap Dm(v)$

Raíz: $f(x) = \sqrt[k]{u} = \sqrt[k]{u(x)} \quad , con\ k > 0 \quad y\ u(x) \geq 0$

Logaritmo: $f(x) = log_k u = log_k u(x) \quad , con\ k > 0, k \neq 1 \quad y\ u(x) > 0$

Por ejemplo, si $u:\Re \mapsto \Re$ y $v:\Re \mapsto \Re$ son tales que $u(x) = x^2$ y $v(x) = 1/(1+x)$, entonces:

1) $f = u + v$ es la función tal que $f(x) = x^2 + (1/(1+x))$
2) $f = u.v$ es la función tal que $f(x) = x^2/(1+x)$
3) $f = u/v$ es la función tal que $f(x) = x^2.(1+x)$
4) $f = u^v$ es la función tal que $f(x) = (x^2)^{1/(1+x)}$
5) $f = \sqrt[7]{u}$ es la función tal que $f(x) = \sqrt[7]{x^2}$
6) $f = \log_5 u$ es la función tal que $f(x) = \log_5 x^2$

¿Existirá otra forma de combinar funciones, que permita obtener una nueva función o si es posible definir una nueva función que saliendo del codominio nos permita llegar al dominio? La respuesta es afirmativa en ambos casos y da lugar a lo que se denomina función compuesta y función inversa, respectivamente.

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

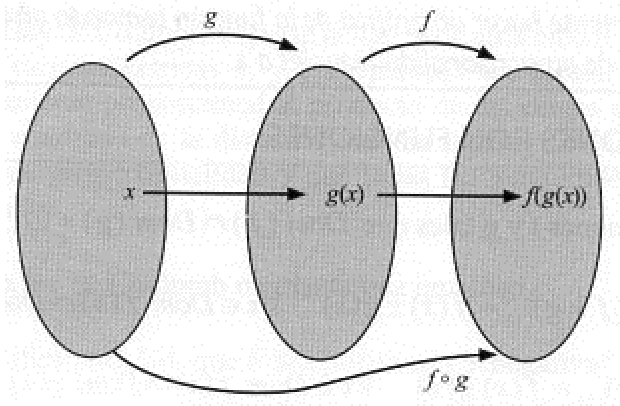
Existe otra forma de combinar las funciones para obtener otra función. Por ejemplo, si se supone que $y = f(u) = 7u \quad y \quad u = g(x) = 5x - 4$. Dado que *y* es una función de *u* y *u* es una función de *x*, se deduce por sustitución que *y* es función de *x*, obteniendo $y = 7(5x - 4) = f(g(x))$. Este procedimiento es llamado ***composición de funciones***, porque la nueva función está compuesta de las dos funciones *f* y *g*.

En general, dadas dos funciones *f* y *g,* si se comienza con un elemento x en el dominio de *g*, para obtener *g(x)* y este elemento se encuentra en el dominio de *f*, es posible aplicar *f* a *g(x)* y obtener el elemento f(g(x)).

DEFINICIÓN:

Dadas dos funciones *f* y *g*, se llama función compuesta *f o g* (se lee *g* compuesta con *f*) a la función definida por $(f o g)(x) = f\big(g(x)\big)$ y existe siempre que *Im g(x)* $\subseteq$ *Dom f(x)*

En el siguiente diagrama visualizamos como se da la composición de funciones:



Imagina que una máquina toma una botella de gaseosa, la llena y luego la tapa. El llenado de la botella será la primera función que se aplica, y taparla sería la segunda función que se aplica. Por lo que la máquina estaría haciendo una composición de funciones $f \ o \ g$ (x). En este caso, podemos ver que no es posible invertir el orden de las tareas, de modo que puede no existir *g o f*, o bien, o a pesar de existir, puede no cumplirse que *f o g* (x)= *g o f*(x).

<u>Actividad N° 4</u>: Dadas las siguientes funciones $f(x) = \sqrt{x} \quad y \quad g(x) = x + 5$.

a) Determina el Dominio y codominio de cada una de ellas.
b) Determina: *f o g* (x)   y   *g o f*(x).
c) Analiza y compara el Dominio de cada una de las funciones compuestas.
d) ¿Se cumple *f o g* (x)= *g o f*(x)?

<u>FUNCIÓN INVERSA</u>

Recordemos que una función es un modelo matemático que puede expresar, por ejemplo el proceso en el cual el plástico se transforma en bolsas. ¿Bajo qué circunstancias es posible recuperar la materia prima (plástico) a partir del producto (bolsas)?
Es intuitivo el hecho de que no siempre es posible encontrar un proceso inverso.
Matemáticamente, buscamos condiciones sobre la función *f* de manera que tenga una función inversa. Siguiendo nuestro ejemplo del plástico, se hace claro que buscamos la función tal que:

$$g[f(x)] = x, \forall x \in Dom(f)$$
$$f[g(y)] = y, \forall y \in Dom(g)$$

Las condiciones de las que hablamos son los conceptos de inyectividad y sobreyectividad, que desarrollaremos a continuación:

<u>CLASIFICACIÓN DE FUNCIONES</u>

Una FUNCIÓN ES <u>INYECTIVA</u> cuando para todo par de elementos distintos del dominio le corresponden imágenes distintas. Simbólicamente si:

$$\forall a, \forall b \in D_f \ / \ a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

Es decir: a cada elemento del Rango le corresponde un único elemento del dominio, *Una FUNCIÓN ES <u>SOBREYECTIVA</u> si para todo* ***y*** *perteneciente al conjunto de llegada existe un x perteneciente al dominio tal que y=f(x). Simbólicamente si:*

$$\forall y_0 \in \mathrm{Im}(f), \exists x_0 \in Dom(f) \,/\, f(x_0) = y_0$$

Es decir*: f es sobreyectiva si el rango coincide con el conjunto imagen, Im_f =B*

Una FUNCIÓN ES <u>BIYECTIVA</u> si es inyectiva y sobreyectiva.

Por lo tanto, si f es una función biyectiva entonces *a cada elemento* $y \in Im(f) = Rg(f) le\ corresponde\ un\ único\ x \in Dom(f)$ y entonces podemos definir la función:
$f^{-1}: Rg(f) \rightarrow Dom(f)/f^{-1}(y) = x$, que llamaremos función inversa.

<u>Teorema:</u>
La función $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$ admite inversa si y solo si es biyectiva

<u>FUNCIÓN INVERSA</u>

Se llama FUNCIÓN INVERSA de una función biyectiva a $f : A \rightarrow B$ **a la función** $f^{-1} : B \rightarrow A / f^{-1}(y) = x$ **si y solo si** $f(x) = y$ **.**
Por ejemplo, la función $f : R \rightarrow R / f(x) = x^3$ **es biyectiva y es invertible ya que posee función inversa** $f^{-1} : R \rightarrow R / f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

<u>ANÁLISIS DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN</u>

Recordemos que una función es el modelo más aproximado de un fenómeno real: físico, financiero, biológico, etc.es importante extraer y utilizar el máximo de información sobre el fenómeno a partir el análisis de su gráfica.
Como ya definimos anteriormente el par $(x; f(x))$ con $x \in Domf$, conforma un subconjunto del plano lo que determina la representación gráfica de la función *f.*
En cada grafica de una función se podrá visualizar y conjeturar propiedades y y características inherentes a la función y predecir resultados, esto es importante porque permiten tomar decisiones de manera inmediata.
Dichas características las trabajaremos en los siguientes conceptos: paridad, periodicidad, monotonía, invertibilidad.
Por ejemplo:

- si una función es par o impar, basta con manejar la mitad derecha o izquierda de la función
- si una función es periódica, basta con manejar la función en una región mucho más pequeña que el dominio

- si una función es invertible, entonces existe un proceso (función inversa) por el cual los productos pueden reconvertirse en materia prima
- si una función es monótona, entonces las imágenes sólo crecen o decrecen cuando nos desplazamos.

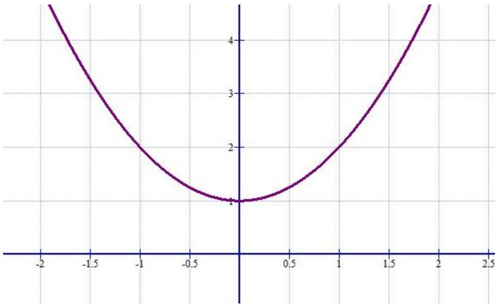
A continuación desarrollaremos cada una de las condiciones mencionadas:

- **Paridad**

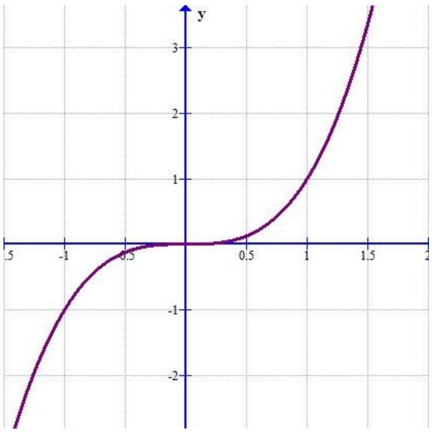
Sea *f* una función real:

- Se dice que *f* es una función par si $f(x) = f(-x), \forall x \in Dom(f)$
- Se dice que *f* es una función impar si $f(x) = -f(-x), \forall x \in Dom(f)$

Como podemos observar en el siguiente ejemplo: $f(x) = x^2$, es una función par y su grafica es simétrica con respecto al eje de las ordenadas



Como podemos observar en el siguiente ejemplo: $f(x) = x^3$, es una función impar y su grafica es simétrica con respecto al origen del sistema de ejes cartesianos. Es importante tener en cuenta que en la función impar, siempre $f(0) = 0$



- **Periodicidad**

En la naturaleza hay muchos fenómenos que presentan un comportamiento cíclico o periódico, por ejemplo las ondas de radio.

El modelo matemático, más simple, que permite modelar un fenómeno periódico se presenta de la siguiente manera:

Definición: Se dice que una función $f: R \rightarrow R$ es periódica si existe un número $p > 0$ tal que: $f(x+p) = f(x)\ , \forall x \in R$

El ejemplo más importante en este tipo de funciones son las *funciones trigonométricas* que desarrollaremos próximamente.

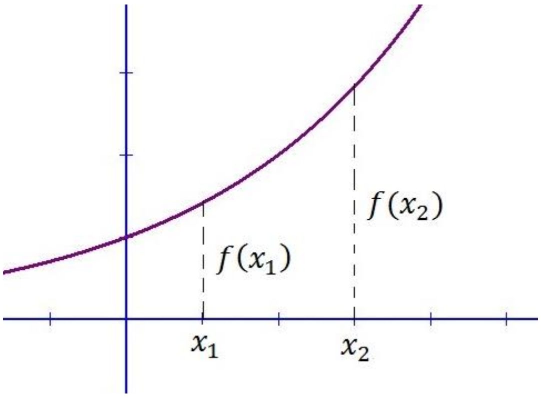
- **Monotonía**

Cuando el dominio de una función no es finito, lo que la confección de una tabla solo permitirá conocer algunas imágenes del dominio, es útil poder establecer el comportamiento de la grafica de la función para una mejor representación.

Definición:
Se dice que una función $f: R \rightarrow R$ es:

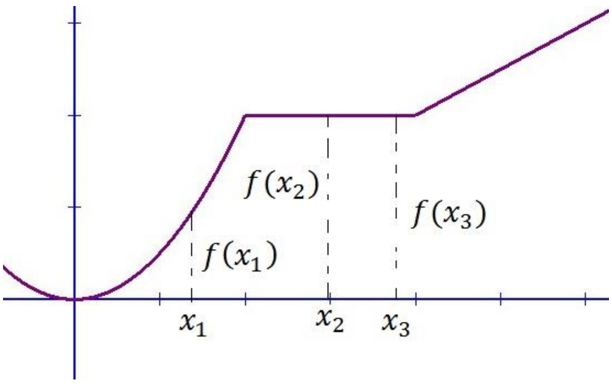
- **monótona creciente** si dados cualesquiera de $x_1, x_2 \in Dom\, f\ con\, x_1 < x_2$, es $f(x_1) \leq f(x_2)$
- **monótona estrictamente creciente** si dados cualesquiera de $x_1, x_2 \in Dom\, f\ con\, x_1 < x_2$, es $f(x_1) < f(x_2)$
- **monótona decreciente** si dados cualesquiera de $x_1, x_2 \in Dom\, f\ con\, x_1 < x_2$, es $f(x_1) \geq f(x_2)$
- **monótona estrictamente decreciente** si dados cualesquiera de $x_1, x_2 \in Dom\, f\ con\, x_1 < x_2$, es $f(x_1) > f(x_2)$

Por ejemplo:



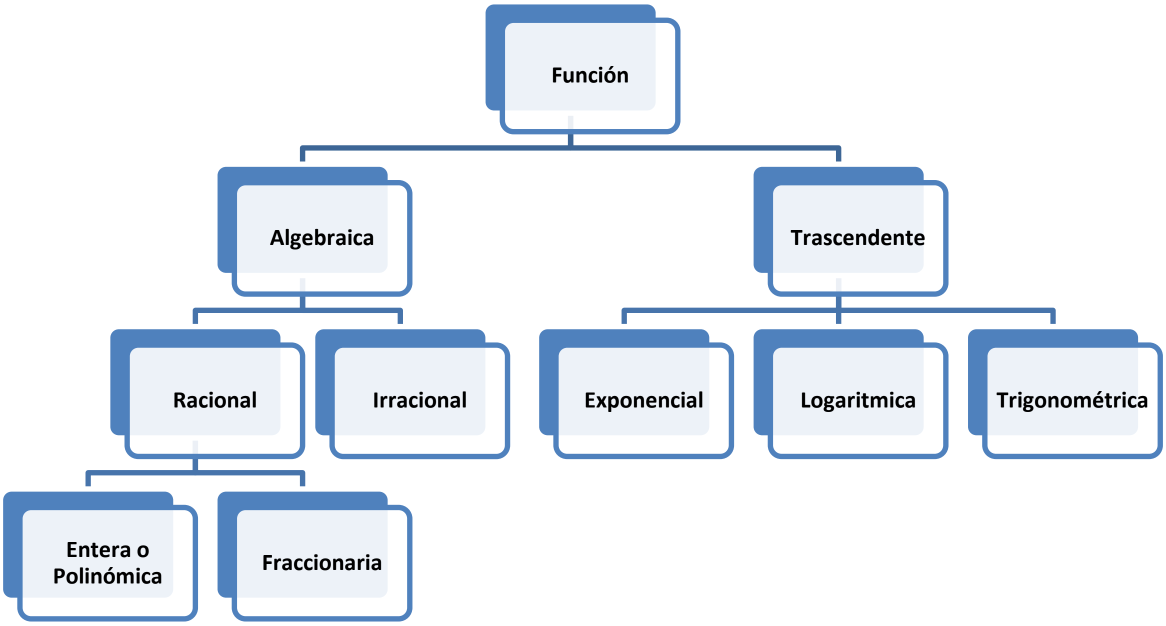
Función estrictamente creciente

Función creciente



$x_1 < x_2 < x_3 \quad resulta\ f(x_1) < f(x_2) \leq f(x_3)$

CLASIFICACIÓN DE FUNCIONES, SEGÚN SU EXPRESIÓN ALGEBRAICA



FUNCIONES ALGEBRAICAS

Son aquellas en las que las variables se relaciones por las operaciones de adición, sustracción, producto, cociente, potenciación y radicación.

Por ejemplo: $f(x) = 3x - 5x^5$ $\quad g(x) = \frac{3x}{4x-4} + 3x \quad h(x) = \sqrt{3x-5}$

Son aquellas en las que las variables se relaciones por las operaciones de adición, sustracción, producto, cociente, potenciación Son aquellas en las que las variables se relaciones por las operaciones de adición, sustracción, producto, cociente y potenciación. Entre ellas se encuentran las polinómicas o enteras y las Fraccionarias, las que desarrollaremos a continuación:

- **FUNCIÓN ENTERA O POLINÓMICA**

DEFINICIÓN: La **Función Polinómica** es toda expresión de la forma:
$P(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + \cdots + a_2.x^2 + a_1.x + a_0$, donde $a_n$es diferente de cero.
En esta definición se dice que es una ***función polinómica de n-ésimo grado.***
$\boldsymbol{a_n}$; $\boldsymbol{a_{n-1}}$; ... ; $\boldsymbol{a_2}$; $\boldsymbol{a_1}$; $\boldsymbol{a_0}$ Son números Reales y se denominan ***coeficientes de la función***; $\boldsymbol{a_n}$ es el coeficiente principal, $\boldsymbol{a_0}$ es el coeficiente del término independiente; $\boldsymbol{n}$ es el grado de la función.

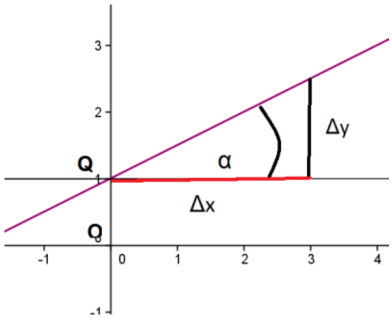
Nota: una función constante, diferente de cero, es un polinomio de grado cero, una función lineal es un polinomio de primer grado, una función cuadrática es un polinomio de segundo grado.

FUNCIÓN LINEAL

Llamamos **función lineal** a toda función de la forma:

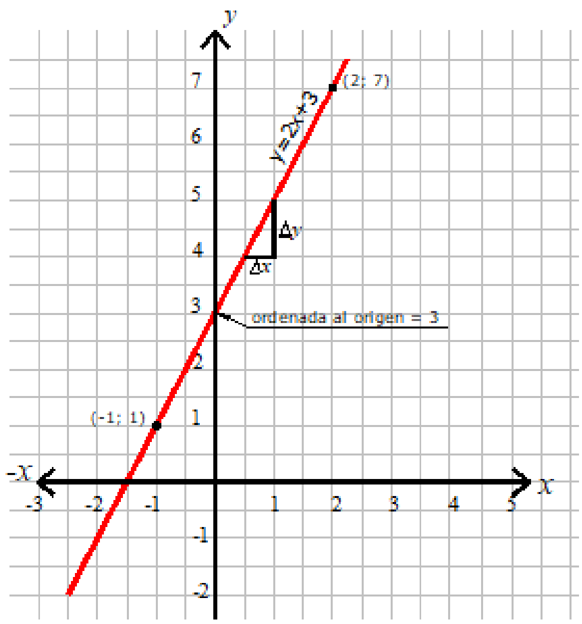
$L = \{I \subset R \to R: x \in I / y = L(x) = mx + b\}$, donde m y b son constantes reales.

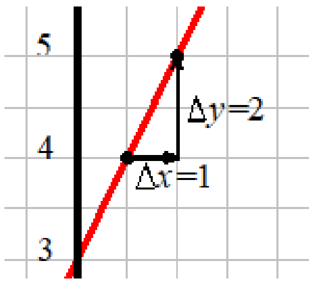
El gráfico de L cruza al eje de las ordenadas (Y) en (0;b). Si $m \neq 0$, el gráfico de L cruza el eje de las abscisas(X) en (-b/m;0). Si $m = 0$, la gráfica de L es una recta paralela al eje de las X y se la denomina *función constante.*



En la expresión **m =tg α** es el coeficiente angular o pendiente de la recta (parámetro d dirección); $\overline{\boldsymbol{OQ}} = \boldsymbol{b}$ es la ordenada al origen (parámetro de posición). Si b = 0 la recta pasa por el origen. Si a = 0, es decir la ecuación de la recta es y = cte., es una recta paralela al eje x.
La pendiente (inclinación) de una función lineal "m" es la variación de la variable dependiente dividido por el respectivo cambio variable independiente. $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Ejemplo: $f(x) = 2x + 3$





$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{1} = 2$

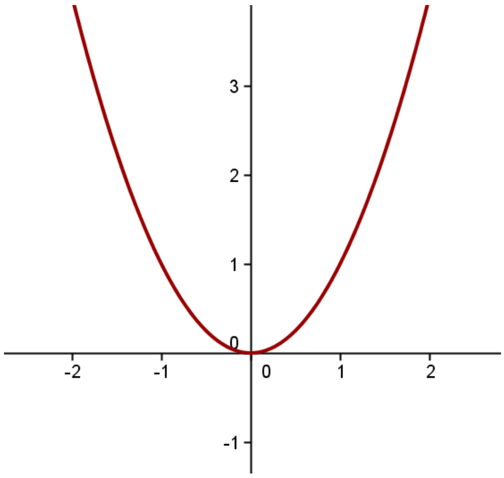
- Vemos en este ejemplo la pendiente m = **2.**
- La ordenada al origen, b = **3,** que es donde corta al eje y.

FUNCIÓN CUADRÁTICA

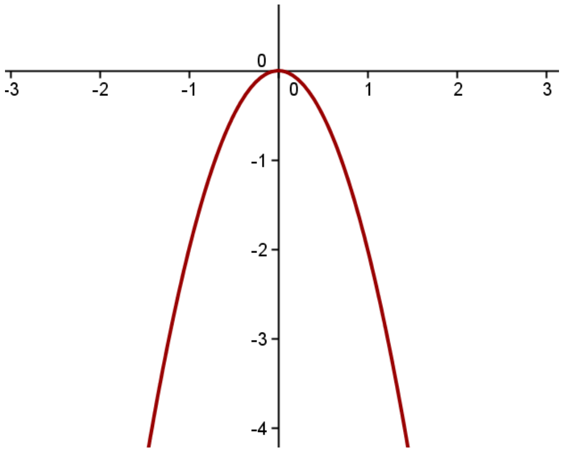
Es de la forma $y = ax^2 + bx + c$. L a grafica de esta función es una parábola vertical abierta hacia arriba o hacia abajo según sea el valor de "***a***" positivo o negativo.

La parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto llamado foco (Vértice) y de una recta llamada directriz (Eje de simetría).

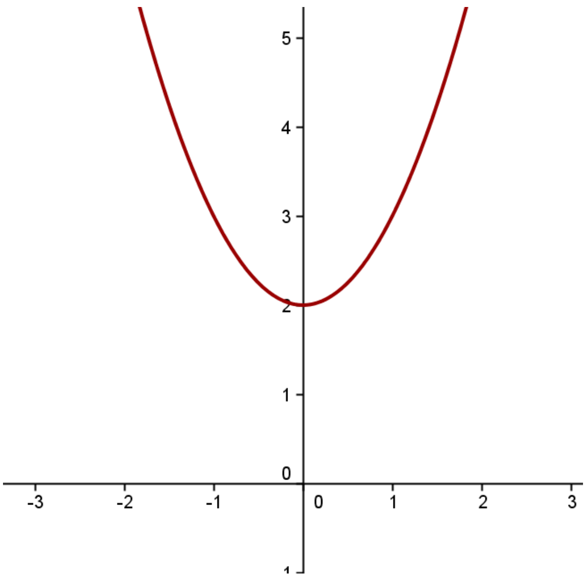
$y = ax^2, con\ a > 0$



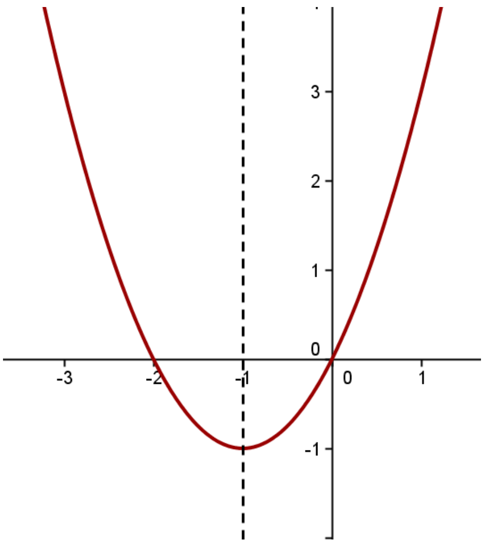
$y = ax^2, con\ a < 0$



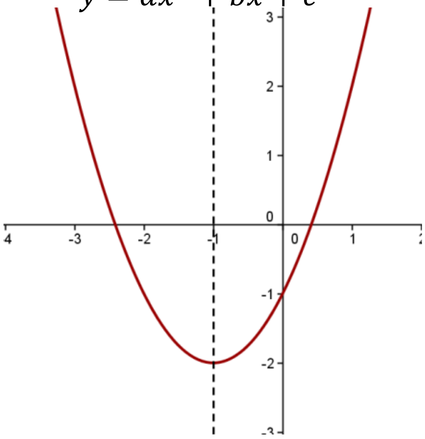
$y = ax^2 + c$



$y = ax^2 + bx$

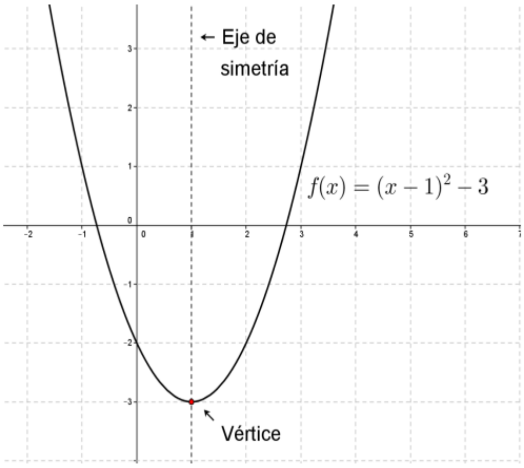


$$y = ax^2 + bx + c$$

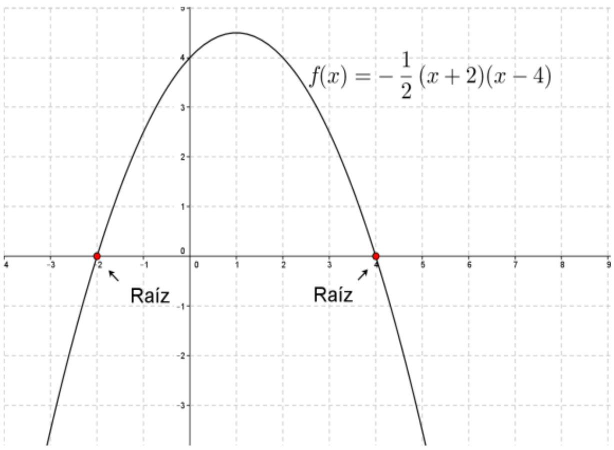


A continuación presentaremos ejemplos de funciones polinómicas:

1. El siguiente grafico corresponde a la función $y = (x-1)^2 - 3$, la cual esta expresada en forma canónica y corresponde a una parábola cóncava.



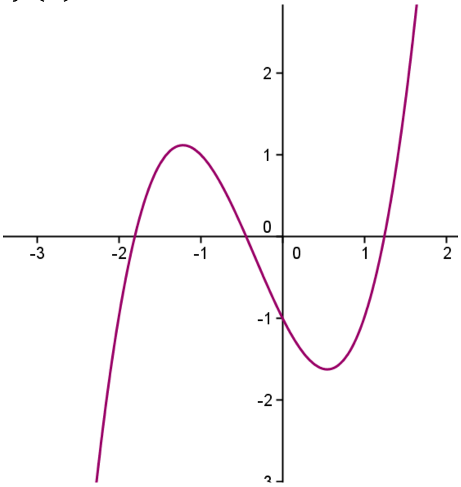
2. El siguiente grafico corresponde a la función $y = -\frac{1}{2}(x+2)(x-4)$, la cual esta expresada en forma factorizada y corresponde a una parábola convexa.



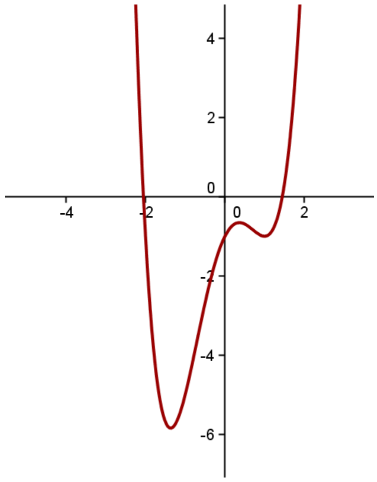
FUNCIÓN POLINÓMICA

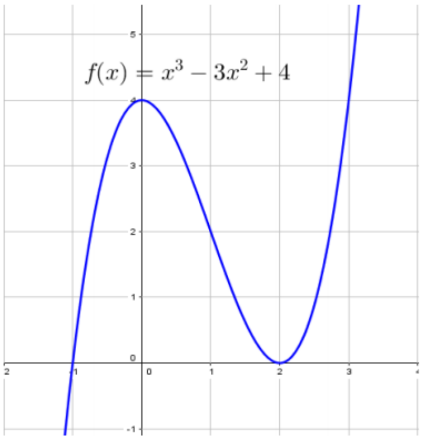
Decimos que es una función polinómica de grado n, cuando su expresión es un polinomio de grado n. y su gráfica recibe el nombre de parábola de grado n. Por ejemplo:

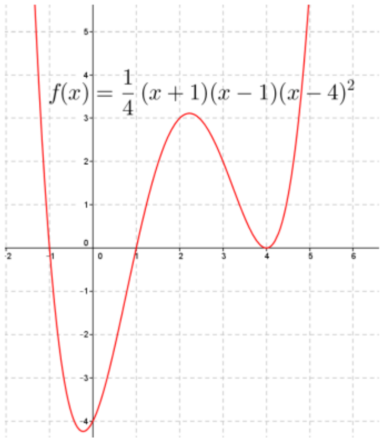
$f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$



$f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 1$







- **FUNCION RACIONAL FRACCIONARIA:**

  Es el cociente de dos polinomios y tiene la forma:

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m}$$

Los valores de x que anulan el denominador y no anulan al numerador se llaman polos o infinitos de la función.

Los valores de x que anulan al numerador y no anulan al denominador se llaman raíces o ceros de la función.

FUNCIÓN HOMOGRÁFICA o BILINEAL:

Es el cociente entre dos funciones lineales del tipo: $y = \frac{ax+b}{cx+d}$. Los coeficientes numéricos cumplen con las siguientes condiciones:

$a)\ c \neq 0$, porque si lo fuera la función se reducirià a una función lineal del tipo: $y = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$

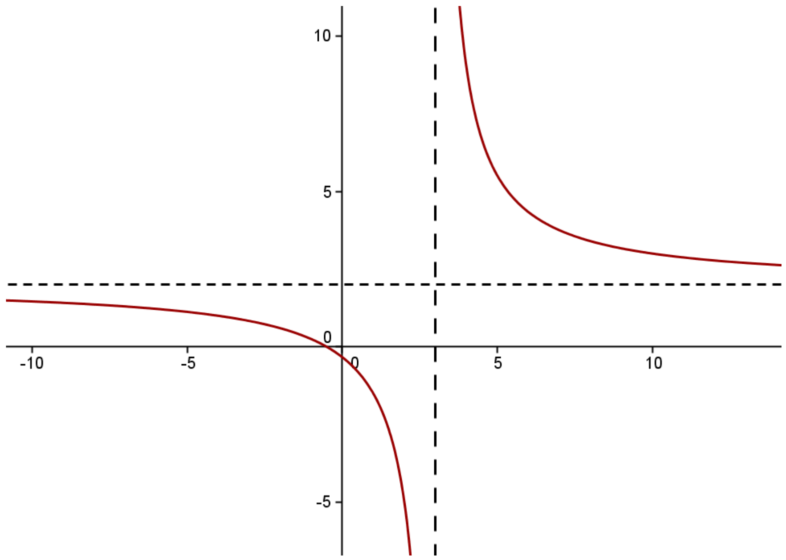
$b)\ el\ denominador\ debe\ ser\ distinto\ de\ cero, por\ lo\ que\ resulta: x \neq -\frac{d}{c}$

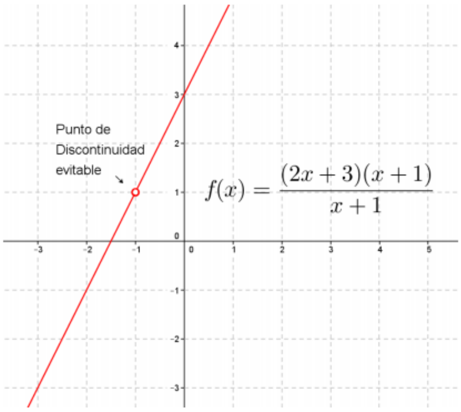
$c)\ bc - ad \neq 0$, ya que de serlo significaría que el resto del cociente seria cero, es decir exacta. Lo que significaría que se podría expresar a la función como $y = cte$.

Podemos observar que cuando x se aproxima al valor $-\frac{d}{c}$ la función y, toma valores muy grandes, lo que expresamos como que y tiende a infinito ($y \rightarrow \infty$), este valor que anula el denominador se llama infinito o polo de la función. La recta de ecuación $x = -\frac{d}{c}$, es paralela al eje ***y*** y se llama asíntota vertical de la función homográfica.

Cuando x toma valores muy grandes, decimos que x tiende a infinito ($x \rightarrow \infty$) , la función toma valores próximos a $\frac{a}{c}$, decimos que la recta $y = \frac{a}{c}$ es una recta llamada asíntota horizontal a la función homográfica.

Ejemplo: $y = \frac{2x+1}{x-3}$ con asíntota vertical en x = 3 y asíntota horizontal en y = 2.



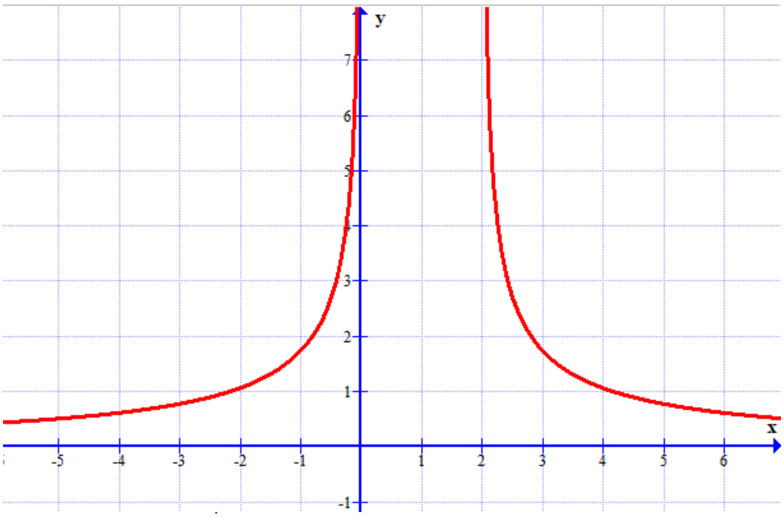


II. **<u>FUNCIÓN IRRACIONAL:</u>**

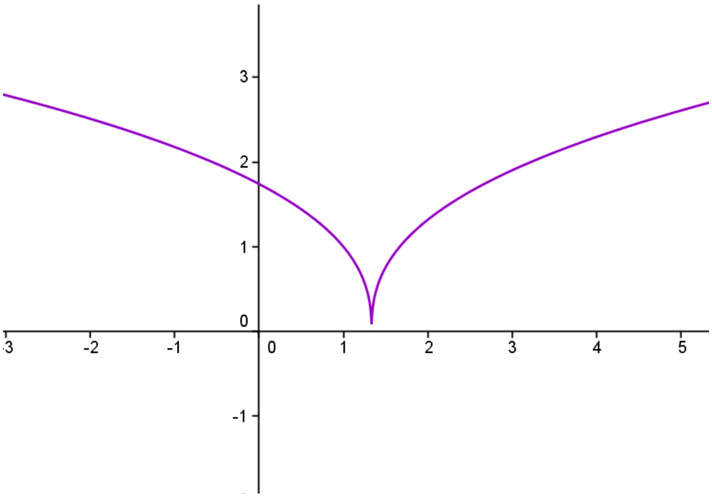
Son aquellas en las que las variables, además de relacionarse por las operaciones de adición, sustracción, producto, cociente, potenciación, aparecen también las de radicación o exponentes racionales no enteros.

<u>Por ejemplo:</u>

$$y = \frac{3}{\sqrt{x^2-2x}}$$



$$y = (3x-4)^{\frac{2}{5}}$$



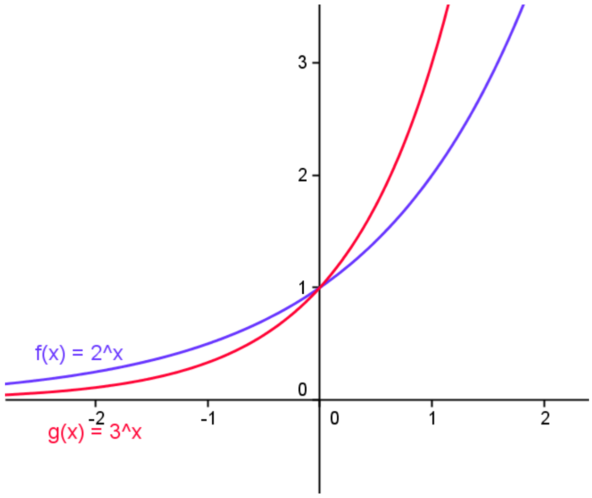
FUNCIONES TRASCENDENTES

Se llaman Funciones Trascendentes porque su expresión trasciende el campo del algebra.
Entre ellas se encuentran:

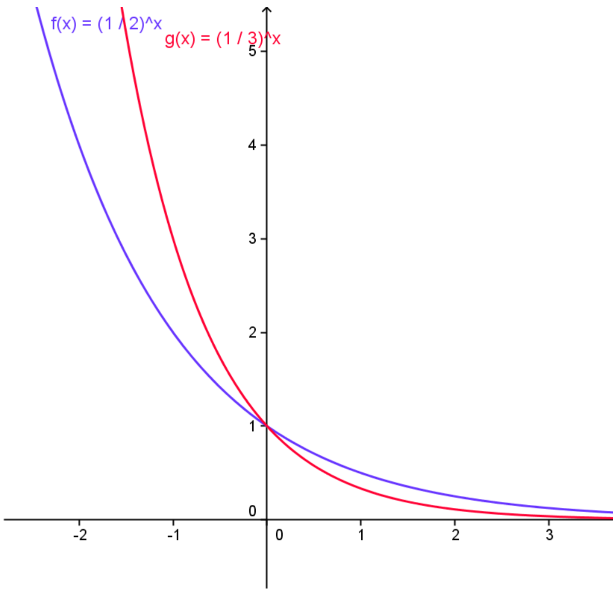
I. FUNCIÓN EXPONENCIAL

La función exponencial es una función de la forma $f_{(x)} = a^x$, donde ***a*** es un número real mayor que **cero** y distinto de 1, $(a \neq 1 \;\; y \;\; a > 0)$.
Desde el punto de vista grafico resulta:

Si $a > 1$



Si $0 < a < 1$



Se cumple:

a) Dominio de la función: los números reales, $D(f) = R$
b) Si a> 1 la función es creciente
c) Si $0 < a < 1$ la función es decreciente
d) La función es positiva para cualquier valor de x, $f(x) > 0$
e) Posee una asíntota horizontal en y=0

Observación:
Es de mucha importancia el caso particular en que $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}$ donde el número irracional

$$\boldsymbol{e} = \mathbf{2,718281828459} \ldots$$

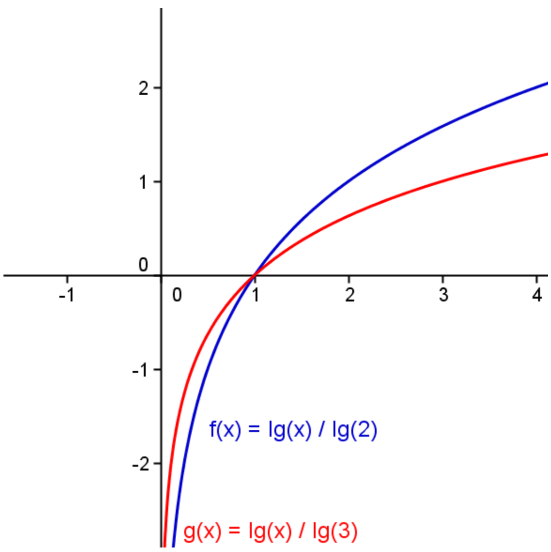
es conocido como número de Neper (número e) . Se la expresa como $\boldsymbol{e^x}$ (función exponencial natural), forma parte de las funciones exponenciales.

II. FUNCIÓN LOGARÍTMICA

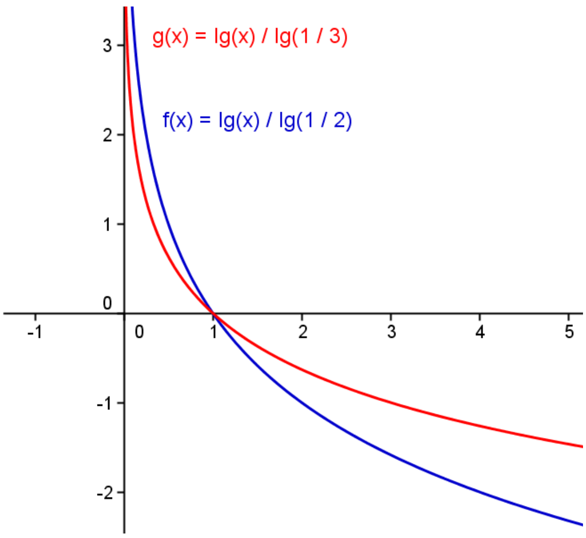
La función logarítmica es una función de la forma $f_{(x)} = \log_a x$, donde a es un número real mayor que cero y distinto de 1 $(a \neq 1 \;\; y \;\; a > 0)$.

Desde el punto de vista grafico resulta:

Si $a > 1$



Si $0 < a < 1$



Se cumple:

a) Dominio de la función: los números reales, excluido el cero, $D(f) = R^+ - \{0\}$
b) Su función inversa es la función $f(x) = a^x$

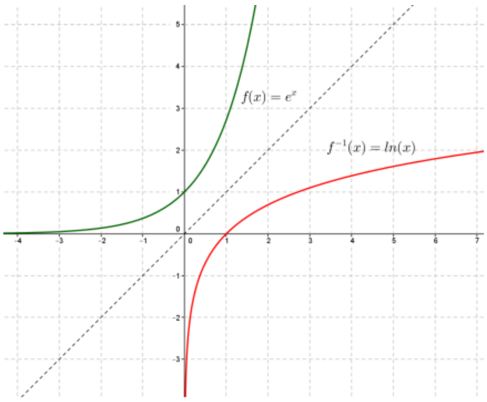
c) Si a > 1 la función es creciente
d) Si 0 < a < 1 la función es decreciente
e) posee una asíntota vertical en x = 0

Observación:
Es de mucha importancia el caso particular en que $a = e$. En caso se denota $log_e = ln$ y se refiere como logaritmo natural o logaritmo neperiano.

La función logarítmica es la inversa de la función exponencial, como podemos ver en el siguiente ejemplo:

La función $f: R \to (0,\infty)/f(x) = e^x$ es biyectiva por lo que tiene inversa:

$$f^{-1}: (0,\infty) \to R/f^{-1}(x) = \ln(x)$$



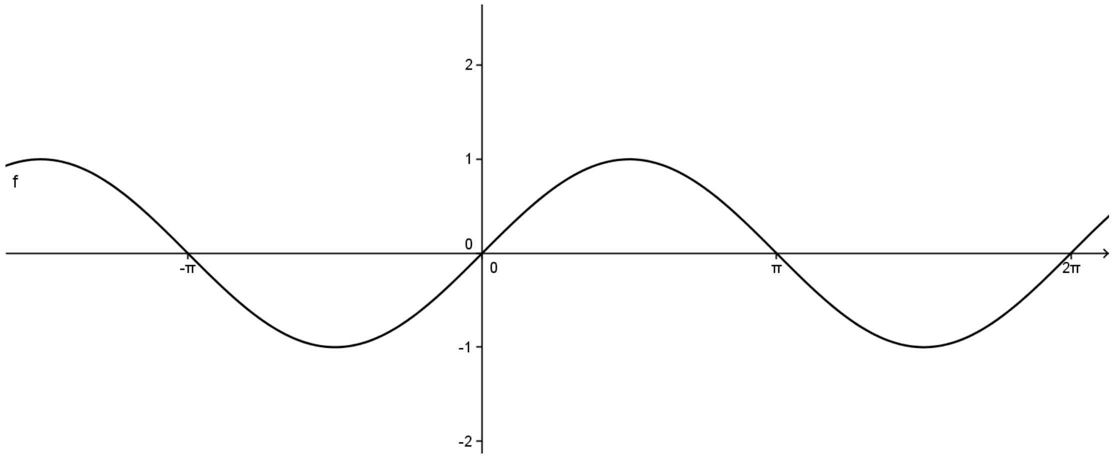
III. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Las tres funciones trigonométricas más importantes son el seno, coseno y tangente. Las funciones trigonométricas son funciones **periódicas.**

Observación: En las funciones trigonométricas calcularemos $senx$, $cosx$ o tgx en los cuales el argumento (ángulo) se describe en radianes y no en grados sexagesimales. Por lo que: $180° = \pi\, rad = \pi$

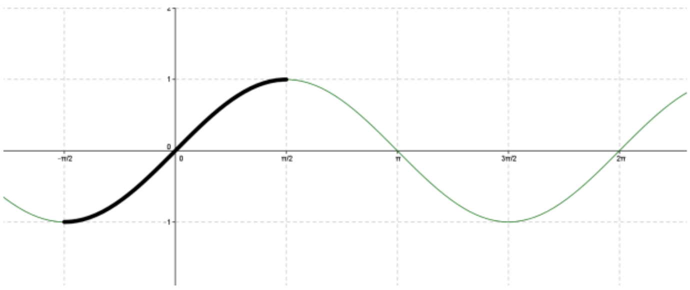
- **FUNCIÓN SENO**

  Es la función definida por $f: R \to R \,/\, f(x) = senx$, los valores de x deberán estar dadas en radianes.



Este grafico se denomina **sinusoide**, su período es 2π. Su imagen varía entre [-1,1]. Es una función impar.

Esta función no es ni inyectiva ni sobreyectiva, por lo que no tendrá función inversa.

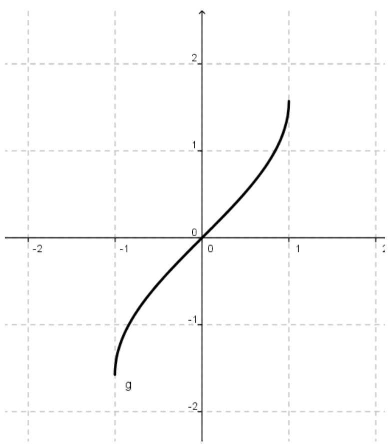


Sin embargo podemos redefinirla para que sea biyectiva y tenga función inversa.

$$f\colon \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1] \;/\; f(x) = senx$$

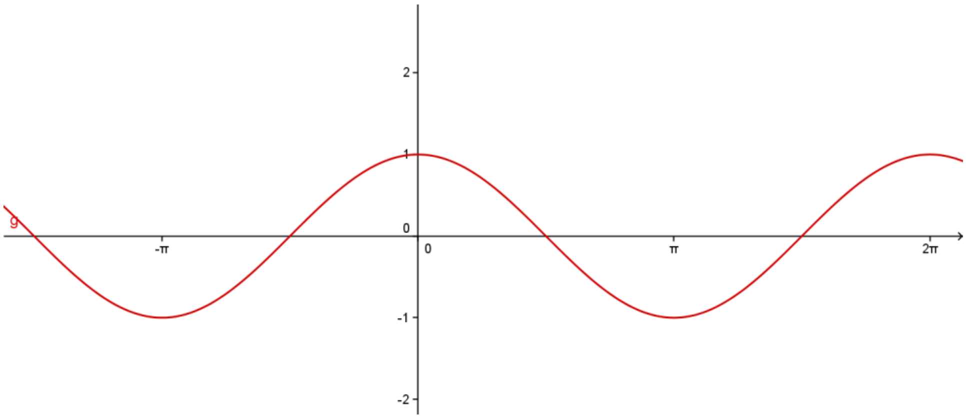
La función inversa es

$$f^{-1}\colon [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \;/\; f^{-1}(x) = arcsenx$$



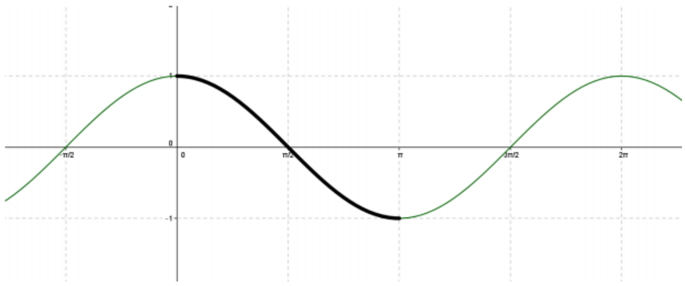
- **<u>FUNCIÓN COSENO</u>**

  Es la función definida por $f: R \to R \ / \ f(x) = cosx$



Este grafico se denomina **cosenoide**, su período es 2π. Su imagen varía entre [-1,1]. Es una función par.

Esta función no es ni inyectiva ni sobreyectiva, por lo que no tendrá función inversa.

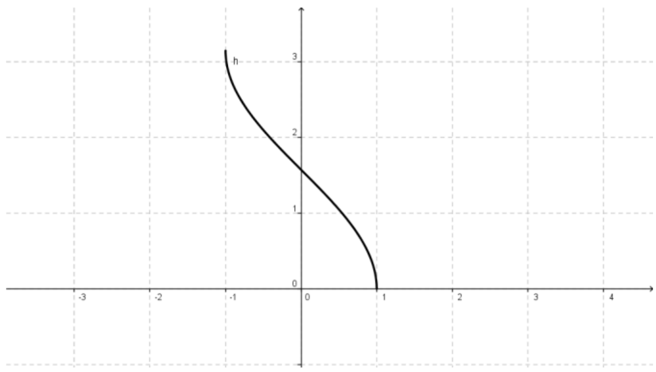


Sin embargo podemos redefinirla para que sea biyectiva y tenga función inversa.

$$f: [0, \pi] \to [-1,1] \ / \ f(x) = cosx$$

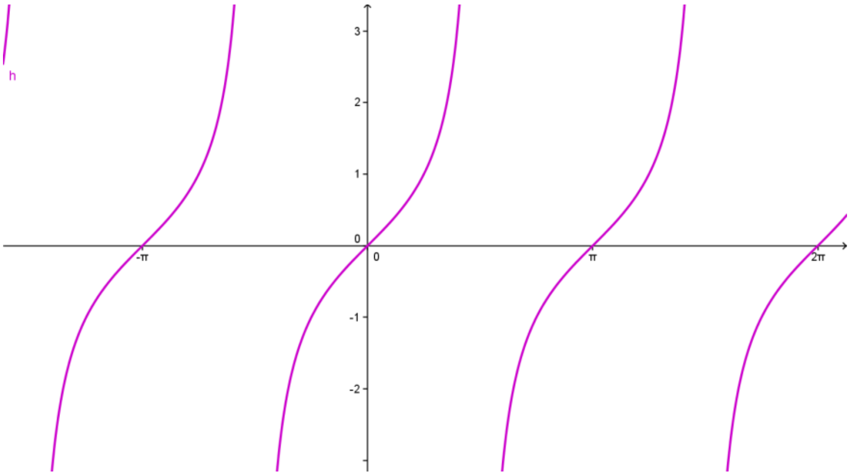
La función inversa es

$$f^{-1}: [-1,1] \to [0, \pi] \ / \ f^{-1}(x) = arccosx$$



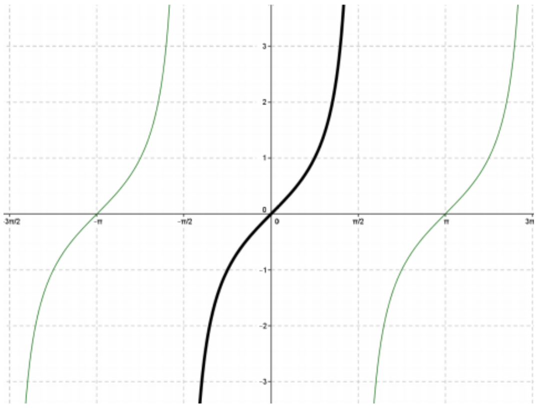
- **FUNCIÓN TANGENTE**

Es la función definida por $f\colon R-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k\in Z\right\}\to R\ /\ f(x)=tgx$



Su período es π. Su imagen son los Reales. Como la tangente es el cociente entre seno y coseno, el Dominio serán los números reales que no anulan la función coseno. Es una función impar.

Esta función no es ni inyectiva ni sobreyectiva, por lo que no tendrá función inversa.

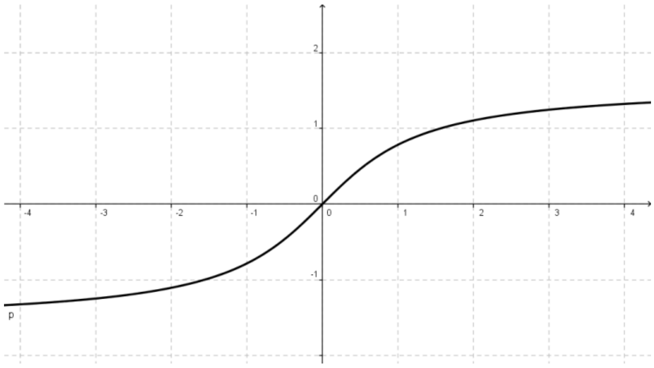


Sin embargo podemos redefinirla para que sea biyectiva y tenga función inversa.

Es la función definida por $f\colon\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to R\ /\ f(x)=tgx$

La función inversa es

$$f^{-1}\colon R\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\ /\ f^{-1}(x)=arctgx$$

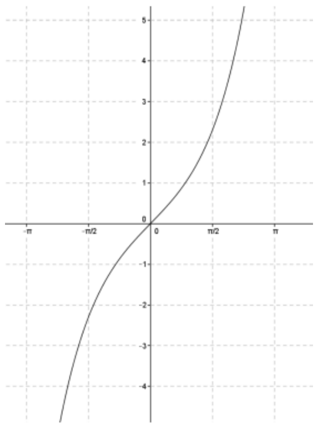


IV. FUNCIONES HIPERBÓLICAS

A continuación presentaremos tres funciones hiperbólicas. Sus definiciones se basan en la función exponencial $y = e^x$

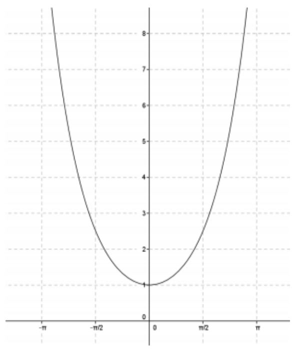
1. Función Seno Hiperbólico: Se define como:

$$f: R \to R / f(x) = senh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



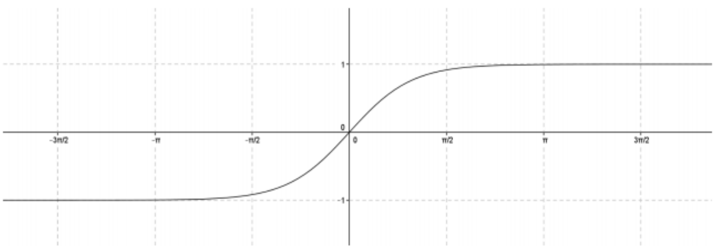
2. Función Coseno Hiperbólico: Se define como:

$$f: R \to R / f(x) = cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



3. Función Tangente Hiperbólico: Se define como:

$$f: R \to R / f(x) = tgh(x) = \frac{senh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$



FUNCIONES PARTIDAS O POR TRAMO O POR INTERVALOS

Una **función partida** es aquella que para definirla se necesitan distintas reglas de asignación para distintos subconjuntos del Dominio

Por ejemplo: $f(x) = \begin{cases} x - 2 \; si \; x \leq 1 \\ x^2 - 2 \; si \; x > 1 \end{cases}.$

*Representarla gráficamente, determ*inar Dominio e Imagen.

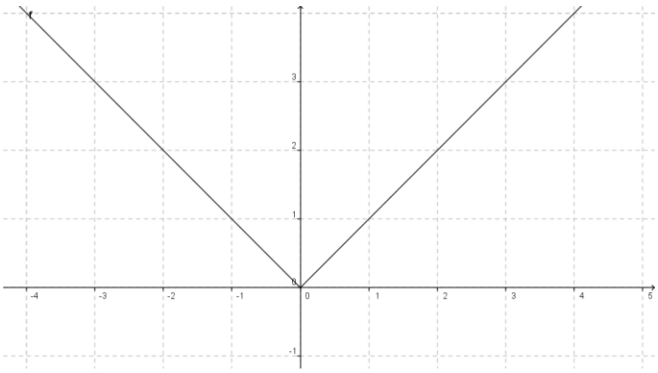
A continuación presentamos cuatro funciones definidas por tramos, que utilizaremos en diferentes ocasiones a lo largo del proceso de estudio.

I. FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO

La función definida como $f(x) = |x|$, $\forall x \in \Re$ llamada valor absoluto.

La cual si se aplica la definición de valor absoluto resulta*:* $f(x) = \begin{cases} x \;\; si \; x \geq 0 \\ -x \; si \; x < 0 \end{cases}.$

Su grafica resulta:



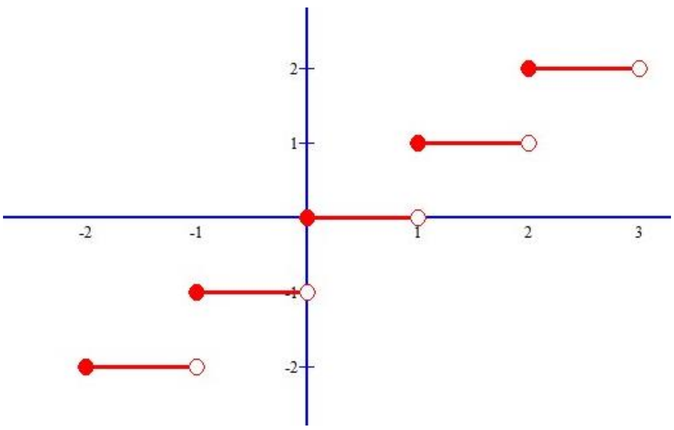
Resulta: $Df = R \;\; y \;\; If = R_0^+$

II. FUNCIÓN PARTE ENTERA

Se llama *parte entera de un número real x* al mayor número entero que es menor o igual que x. Se designa: $[x]$ $o \; ENT(x)$.

*Se define como **función parte entera** :* $f: R \rightarrow R / f(x) = [x]$

La representación gráfica de la función parte entera es escalonada, como se muestra a continuación:

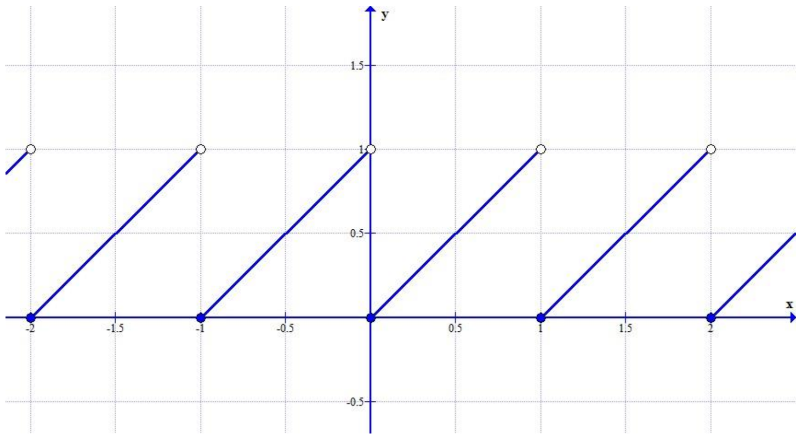


Como se puede observar, resulta:
$Dm = R \;\; y Im = Z$

III. FUNCIÓN MANTISA

Se llama ***función mantisa o parte decimal de x***, a la función definida:

$$f: R \rightarrow R / f(x) = x - [x]$$

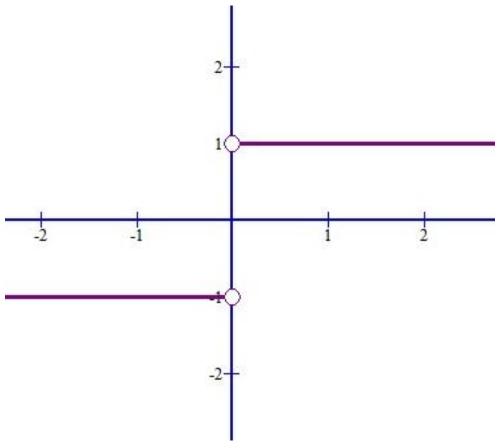


Se la suela llamar diente de sierra por su representación gráfica.
Resulta su dominio $Dm = R \ y \ Im = [0,1)$

IV. FUNCIÓN SIGNO

Se llama *función signo de x*, se indica ***sgn x,*** se define:

$$sgn\ x = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{|x|} \qquad o \qquad sgn\ x = \begin{cases} -1 \ si x < 0 \\ 1 \ \ si x > 0 \end{cases}$$



$Dom(sgn) = R - \{0\} \ y \ Im(sgn) = \{-1; 1\}$

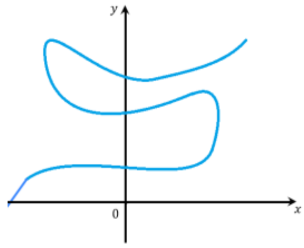
FUNCIÓN IMPLICITA

Se llama *función implícita* a aquella en la que ***y*** no se encuentra sola en uno de los miembros. La que tendrá forma de ecuación de dos variables.
Por ejemplo: $y + x - 3 = 2x^2$, como ocurre en este ejemplo, a veces es posible despejar la variable dependiente y expresarla como *función explicita,* la que resultaría: $y = 2x^2 - x + 3$

Pero puede ocurrir que sea difícil o imposible despejar la variable **y**, como se ve en el siguiente ejemplo: $2xy + 3y + x + \log(\mathrm{x} + \mathrm{y}) = 1$.
Aclaremos que los nombres explicitas o implícitas indican la forma de expresar una función.

FUNCIONES DADAS PARAMETRICAMENTE

Algunas curvas se describen mejor cuando las coordenadas x e y están dadas en términos de una tercera variable ***t*** llamada ***parámetro***, es decir $x = f(t)$ e $y = g(t)$.
Imaginemos un objeto que se mueve en un plano y a medida que transcurre el tiempo, describe un camino como el representado por la siguiente curva:



Ella puede ser descripta por una ecuación de la forma $y = F(x)$, donde sabemos que las coordenadas *x* e *y* de la posición de la partícula dependen del instante de tiempo t.
Por lo que existirán funciones f y g de la variable (o parámetro) t, tales que $x = f(t)$ e $y = g(t)$. Este par de ecuaciones, que muchas veces se utilizan para describir una curva, se llaman ecuaciones paramétricas de la curva en el plano:

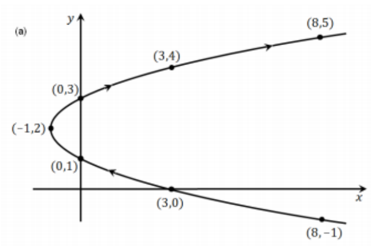
$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

Cada valor de t determina un punto (x,y) en el plano. Cuando t varía (en un intervalo de n° reales), el punto $(x, y) = (f(t), g(t))$ se mueve generando una curva en el plano.

Por ejemplo: $\begin{cases} x = t^2 - 2t \\ y = t + 1 \end{cases}$

si damos valores a t, iremos obteniendo los valor se x e y que forman las coordenadas de los puntos que forman la curva:

t	*x*	*y*
-2	8	-1
-1	3	0
0	0	1
1	-1	2
2	0	3
3	3	4



Actividad N° 5: Grafica las siguientes funciones. Da su dominio e imagen. Analiza su paridad.

a) $y^2 = x \;\; ; \left(y \geq 0\right)$

b) $y = |x - 3|$

c) $y = |x| - 3$

$$d)\ y = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x \leq 2 \\ |x - 1| & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$e)\ y = \begin{cases} -2x^2 & \text{si } x \leq -1 \\ -5 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 4x - 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

f) $y = \dfrac{1}{x}$

g) $y = \dfrac{2+x}{-x+3}$

Esquema de Contenidos