SUCESIONES NUMÉRICAS

La palabra sucesión se utiliza con frecuencia en el lenguaje cotidiano y tiene el mismo significado que en matemática, o sea, el de un conjunto ordenado de elementos.
Así, se habla de la sucesión de los días o de la sucesión de los números naturales con la misma interpretación intuitiva.
Al considerar una sucesión de elementos se conoce cuál es el lugar que ocupa cada uno de ellos mediante una regla o reglas que permiten ubicarlo. Tenemos un primer término; a_1, un segundo término a_2, un enésimo término o término general a_n, etc. El subíndice *n* se llama Orden del Término e indica el número de orden del término.
Una sucesión suele denotarse: $(a_n)=(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, a_{n+1}, ...)$, o bien: $\{a_n\} = \{a_1, a_{2,}, a_{3,} \dots, a_{n,}, a_{n+1,\dots}\}$
Donde los puntos suspensivos finales indican que consideramos infinitos términos.
Ejemplos:

$$(a_n)=\left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{3};...\right) \quad \text{donde } \forall n \in N : a_n = \frac{1}{n}$$

$$(b_n)=\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{4};-\frac{1}{8};...\right) \quad \text{donde } \forall n \in N : b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$(c_n)=(2;1;4;3;6;5;...) \text{ donde } \forall n \in N : \begin{cases} c_n = n-1 & si \quad n \ es \ par \\ c_n = n+1 & si \quad n \ es \ impar \end{cases}$$

La sucesión de Fibonacci: $(x_n)=(1;1;2;3;5;8;13;...)$ se define por recurrencia o sea mediante reglas que permiten obtener cada término a partir de los anteriores:

$$\forall n \in N : \begin{cases} x_n = 1 & si \quad n=1 \\ x_n = 1 & si \quad n=2 \\ x_n = x_{n-2}+x_{n-1} & si \quad n>2 \end{cases}$$

$$1;\ \frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{8};\frac{1}{16}; \dots, donde\!: \quad a_1 = 1;\ a_2 = \frac{1}{2^1};\ a_3 = \frac{1}{2^2};\ a_4 = \frac{1}{2^3};\ a_5 = \frac{1}{2^4}; \dots;\ a_n = \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{4}{5};\frac{5}{6};\dots;\frac{n}{n+1};\dots$$

$$\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{6};\frac{1}{6};\frac{1}{8};\frac{1}{8};\dots;\frac{2}{2n+1-(-1)^n};\dots$$

En estos ejemplos vemos claramente la ley o fórmula que permite obtener por medio de operaciones sencillas el término enésimo de la sucesión mediante el análisis de un número conveniente de términos, a partir del primero.

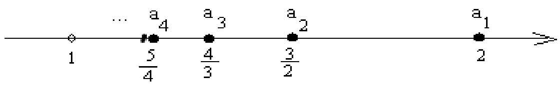
Sucesiones numéricas:
Se observa que a cada número natural le corresponde un término de la sucesión y solamente uno y que los términos de la sucesión pueden ser elementos de cualquier conjunto.
Por lo tanto, una sucesión infinita es un caso particular de función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales y su recorrido o imagen está incluido en el conjunto de los números reales.
Nos interesan especialmente las **sucesiones de números reales**, o sea las funciones del tipo $u_n\!: N \to R$, donde en el $Dom.\!: N \quad e \quad Im.\!: R$

$$\begin{array}{cccccccc} N: & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & \dots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ R: & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n & \dots \end{array}$$

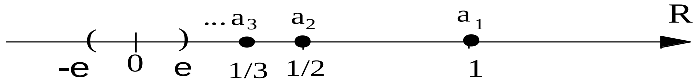
Definición: una sucesión numérica es una función particular, cuyo dominio es el conjunto de los números naturales y su recorrido (o imagen) está incluido en el conjunto de los números reales.

$$u_n : N \to R / \forall n \in N : u(n) = u_n$$

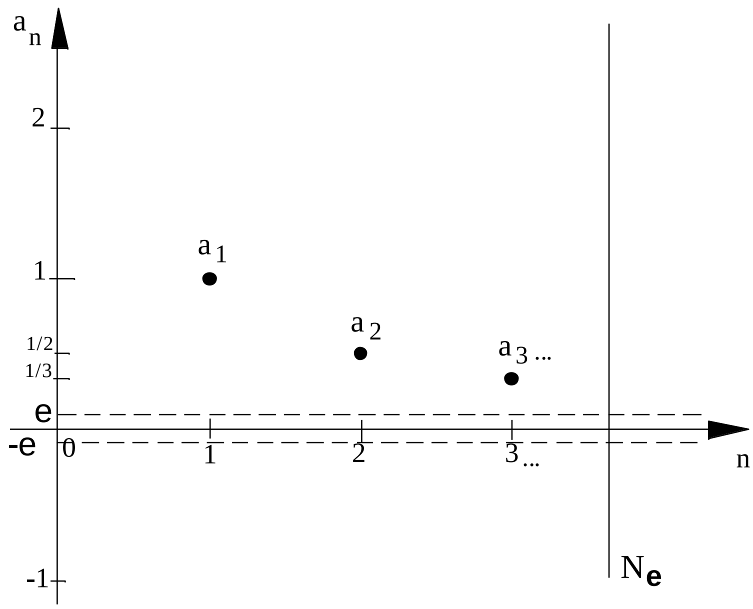
Sea la sucesión: $(a_n) = \left(\frac{n+1}{n}\right) = \left(2; \frac{3}{2}; \frac{4}{3}; \frac{5}{4}; \frac{6}{5}; \dots\right)$. Si representamos los términos mediante puntos de una recta real:



De acuerdo a la definición de sucesión de números reales, habíamos dicho que es una función $u_n : N \to R$.
Analicemos la sucesión: $(a_n) = \left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \dots \frac{1}{n}; \dots\right)$. Su representación mediante puntos de una recta real:



Mediante un diagrama cartesiano, se representan los pares ordenados de la sucesión (conjunto discreto):



Representando los primeros términos de la sucesión, geométricamente vemos que a medida que vamos tomando valores sucesivos de a_n, nos vamos acercando al *0*. En efecto, a_2 está más cerca del *0* que a_1, a_3 está más cerca del *0* que a_2, etc. Pero esto no nos dice todo respecto del acercamiento, pues es cierto también que a_2 está más cerca de *-1* que a_1, a_3 está más cerca de *-1* que a_2, etc. y evidentemente este acercamiento a *0* de esta sucesión tiene una característica que no tiene su acercamiento a *-1*. Esta característica es que esta sucesión llega a estar tan cerca del *0* como se quiera. En cambio esto no vale si cambiamos *0* por *-1*. Esta sucesión no llega a estar tan cerca de *-1* como se quiera, su distancia a *-1* es, como podemos ver, siempre mayor que *1*.
Luego, más adelante vamos a analizar la definición formal de límite de una sucesión de números reales.

Puede suceder que una sucesión tenga infinitos términos, todos con el mismo valor:

$$(a_n) = (1;1;1;1\dots)$$

En este caso el recorrido de la sucesión es el conjunto unitario $\{1\}$.

Igualdad de Sucesiones:
Dos sucesiones son iguales si sus términos coinciden ordenadamente: $(a_n)=(b_n) \Leftrightarrow \forall n \in N : a_n = b_n$
Por ejemplo:
Si $(a_n)=(1;0;1;0;1;0;...)$ y $(\mathrm{b_n})=(0;1;0;1;0;1;...)$
$(a_n) \neq (b_n)$ pero sus recorridos son iguales: $\{0;1\}$.
No debemos confundir igualdad de sucesiones con igualdad de recorridos.

Sean: $(a_n) = (1;0;1;0;1;...)$ $\quad y \quad$ $(b_n) = (0;1;0;1;0;...)$ dos sucesiones.

$$(a_n) \neq (b_n) \quad pero \quad \mathcal{Rec}.\big((a_n)\big) = \mathcal{Rec}\big((b_n)\big) = \{0\,;1\}$$

Sucesiones Acotadas:
Un número real k es una cota superior de la sucesión (a_n) $\Leftrightarrow \forall n \in N : a_n \leq k$
Análogamente: número real $k´$ es una cota inferior de la sucesión (a_n) $\Leftrightarrow \forall n \in N : a_n \geq k´$
Una sucesión numérica que admite cotas superiores está acotada superiormente y si admite cotas inferiores está acotada inferiormente.
Si una sucesión admite cotas superiores y cotas inferiores, se dice que está acotada.
O sea, si una sucesión está acotada: $\forall n \in \mathcal{N}, k > 0$: $|a_n| \leq k \Leftrightarrow -k \leq a_n \leq k$
La mayor de las cotas inferiores es el extremo inferior o ínfimo de la sucesión y la menor de las cotas superiores es el extremo superior o supremo de la sucesión.

Ejemplos:
$(a_n)=(1;2;3;4;...n;...)$ es una sucesión acotada inferiormente, 1 es el ínfimo.
$(b_n)=(-2;-3;-4;...-n;...)$ es una sucesión acotada superiormente, -2 es el supremo
$(c_n)=\left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};...\frac{1}{n};...\right)$ es una sucesión acotada, 1 es el supremo y 0 es el ínfimo
$(d_n) = (-1;1;-1;1;...;\ (-1)^n;...)$ es una sucesión acotada

Sucesiones Monótonas:

$$(\boldsymbol{a_n})\ sucesión\ creciente\ (en\ sentido\ estricto)\ o\ estrictamente\ creciente \Leftrightarrow \forall n \in \mathcal{N}: a_n < a_{n+1}$$
$$(\boldsymbol{a_n})\ sucesión\ decreciente\ (en\ sentido\ estricto)\ o\ estricatamente\ decreciente \Leftrightarrow \forall n \in \mathcal{N}: a_n > a_{n+1}$$
$$(\boldsymbol{a_n})\ sucesión\ creciente\ (en\ sentido\ amplio) \Leftrightarrow \forall n \in \mathcal{N}: a_n \leq a_{n+1}$$
$$(\boldsymbol{a_n})\ sucesión\ decreciente\ (en\ sentido\ amplio) \Leftrightarrow \forall n \in \mathcal{N}: a_n \geq a_{n+1}$$

Una sucesión que crece o decrece en sentido estricto o amplio se denomina monónota creciente o decreciente en sentido estricto o amplio.

Ejemplos:
a) (n^2), sucesión estrictamente creciente.
b) La sucesión de Fibonacci es una sucesión creciente en sentido amplio.
c) $\left(\frac{n}{n+1}\right)$, sucesión estrictamente decreciente.
d) $\left(\frac{2}{2n+1-(-1)^n}\right)$, sucesión decreciente en sentido amplio.

Límite de Sucesiones:

Sucesión convergente:
Sea la sucesión: $(a_n) = \left(\frac{1}{2^n}\right) = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{8};\frac{1}{16};\frac{1}{32};...\right)$. Intuitivamente, vemos que los términos de esta sucesión se aproximan o tienden a cero. Simbólicamente: $\underset{n\to\infty}{\frac{1}{2^n}\to 0}$. O sea: cuando n toma valores cada vez más grandes (otra cosa no puede tomar), los valores de la función toman valores cada vez más chicos acercándose cada vez más al cero o tendiendo a cero.

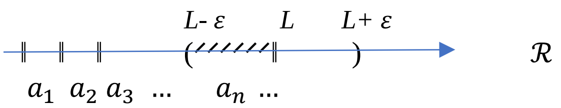
Definición: una sucesión numérica (a_n) tiene límite L , si y sólo si, para cualquier número positivo que designamos por ε (épsilon), existe otro número positivo δ (delta) que depende de ε , $\partial(\epsilon)$ tal que, para todo número $n \in N \wedge n > \partial(\epsilon) \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$
Se indica: $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n) = \lim (a_n) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \partial(\epsilon) / \forall n (n \in N \wedge n > \partial(\epsilon) \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon)$

Sucesión Convergente: una sucesión es convergente, si y solo si, su límite es finito. O bien, la sucesión converge a un número L.

Analicemos esta definición y las condiciones que se presentan.

Si la sucesión es convergente, o converge a L, se tiene que cumplir que, dado o un número positivo que generalmente se denota con la letra griega ε que, si observamos en la definición, el consecuente de la implicación, es un entorno de centro L y radio ε , o sea la distancia entre los términos de la sucesión y su límite, son menores que ese número ε . Es así que tal número positivo ε es conveniente que sea pequeño, tan pequeño como se quiera. Es decir, la diferencia en valor absoluto entre los términos de la sucesión y su límite son menores que ε . O, los términos de la sucesión difieren de su límite en menos de ε .
Gráficamente, prefijado un entorno cualquiera de L de radio ε , es posible determinar un número $\delta(\varepsilon)$ tal que los términos de la sucesión que verifican n > $\delta(\varepsilon)$, pertenecen a dicho entorno.
El número $\delta(\varepsilon)$ es mayor o igual que número de los valores $a_1, a_2\ , a_3\ \ldots, a_n$, ... que se encuentran fuera del intervalo $(L - \varepsilon; L + \varepsilon)$. Asimismo, cualquier número $\delta' > \delta$ satisface la definición.

Observemos que para cualquier $\varepsilon > 0$ en el intervalo $(L - \varepsilon; L + \varepsilon)$ están todos los términos de la sucesión, excepto un número finito de términos δ, si $\delta \epsilon \mathcal{N}$.



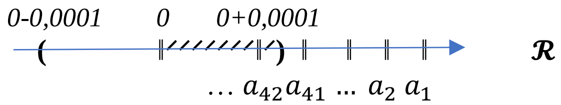
Ejemplo:
Un cierto instrumento pierde valor con los años. De hecho, al final de cada año vale solo un 80 % del valor que tenía al principio del año ¿Cuál será su valor al final de los tiempos?

Sea: (a_n): el valor del instrumento al cabo de *n* años.
Luego: $a_1 = 0{,}8$ $\quad a_2 = (0{,}8)^2 = 0{,}64$ $\quad a_3 = (0{,}8)^3 = 0{,}512\ \ldots\ a_n = (0{,}8)^n$. Así:

$(a_n) = (0{,}8)^n = (0{,}8\,; 0{,}64\,; 0{,}512\,; 0{,}4096; 0.3277\,; 0{,}1074\,; 0{,}0115\,; \ldots)$, los términos de esta sucesión sugieren que el *lím* $((0{,}8)^n) = 0$.

Apliquemos la definición de límite:
lím $((0{,}8)^n) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \partial(\epsilon) / \forall n (n \in N \wedge n > \delta(\epsilon) \Rightarrow |0{,}8^n - 0| < \varepsilon)$
Sea: $\varepsilon = 0{,}0001$.
Debemos estimar un $\delta(0{,}0001)$, tal que para todo número natural $n > \delta(0{,}0001) \Rightarrow |0{,}8^n - 0| < 0{,}001$
Partimos de la desigualdad: $|0{,}8^n - 0| < 0{,}001$
Como *n*>*0*, podemos escribir: $0{,}8^n < 0{,}001$
Aplicando logaritmo a ambos miembros de la desigualdad y una de sus propiedades:
$n \,.\, \log 0{,}8 < \log 0{,}0001$
Operando: $n \,.\, (-0{,}096910013) < -4$
Entonces: $n > \frac{-4}{-0{,}097} \cong 41{,}3 \Longrightarrow n > 41{,}3$
Por lo tanto, un $\delta(\varepsilon) = \delta(0{,}0001) \cong 41{,}3$
Luego, para todo número natural $n > 41$ *o* $n \geq 42$: $|0{,}8^n - 0| < 0{,}001$, *entonces el lím* $((0{,}8)^n) = 0$
Desde el punto de vista gráfico, los 41 primeros términos de la sucesión están fuera del Entorno de centro en cero y radio 0,001: $(0 - 0{,}0001; 0 + 0{,}0001)$ y, cuando mas pequeño sea el ε más grande será el $\delta(\varepsilon)$, pero siempre será finito el número de términos de la sucesión que no caerán dentro del Entorno especificado.

Gráficamente:



Un aspecto importante de las sucesiones que siempre debe tenerse en cuenta, es que quizás ningún término de la sucesión coincide con el límite, aunque se aproximan a éste con precisión arbitraria.

Algunas Propiedades de las Sucesiones convergentes:

(1) El límite de una sucesión, si existe, es único.

(2) Si $lím(a_n) = L_1 \quad \wedge \quad lím(b_n) = L_2$, entonces:

- **(a)** El límite de la suma (diferencia) de dos sucesiones convergentes, es igual a la suma (diferencia) de los límites de las sucesiones: $lím[(a_n) \pm (b_n)] = lím(a_n) \pm lím(b_n) = L_1 \pm L_2$
- **(b)** $lím[(a_n).(b_n)] = lím(a_n).lím(b_n) = L_1.L_2$
- **(c)** $lím\left[\frac{(a_n)}{(b_n)}\right] = \frac{lím(a_n)}{lím(b_n)} = \frac{L_1}{L_2} \quad \left((b_n) \neq 0 \quad ; \quad L_2 \neq 0\right)$
- **(d)** $lím[k\,.(a_n)] = k\,.lím(a_n) = k\,.L_1 \quad ; \quad k = cte.$
- **(e)** Sean (a_n) y (b_n) sucesiones convergentes. Si: $\forall n \in \mathcal{N}: (a_n) > (b_n) \Longrightarrow lím(a_n) \geq lím(b_n)$

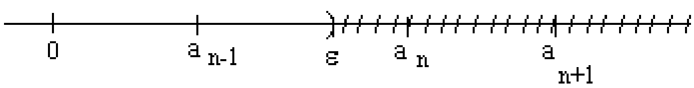
Sucesión Divergente:

Hay algunas sucesiones, como la de los números naturales que no tienen límite finito pero sus términos, a partir de uno de ellos, superan a cualquier número positivo que se elija.
Tal número positivo ε es conveniente que sea grande.
En otros casos los términos de una sucesión (como la de los números enteros negativos), superan en valor absoluto, a partir de uno de ellos, a cualquier número positivo ε que se elija.
Estas sucesiones tienen límite infinito.

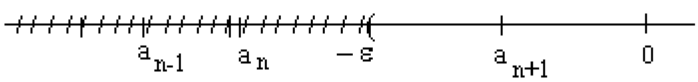
Definición:
Una sucesión numérica (a_n) tiene límite infinito si y sólo si, para cualquier número positivo ε, existe un número positivo $\delta(\epsilon)$ tal que para todo $n \in N : (n \in N \wedge n > \delta) \Rightarrow |a_n| > \varepsilon$.
Se indica $lím\ (a_n) = \infty$.

Una sucesión es divergente si y sólo si su límite es infinito. Es preferible considerar por separado el caso en que la sucesión numérica diverge a $+\infty$ o $-\infty$.

Es decir: $lím\ (a_n) = +\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta(\varepsilon)/\forall n: (n \in N \wedge n > \delta(\varepsilon) \Longrightarrow a_n > \varepsilon)$
$lím\ (a_n) = -\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta(\varepsilon)/\forall n: (n \in N \wedge n > \delta(\varepsilon) \Longrightarrow a_n < -\varepsilon)$



$lím\ (a_n) = -\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta(\varepsilon)/\forall n: (n \in N \wedge n > \delta(\varepsilon) \Longrightarrow a_n < -\varepsilon)$

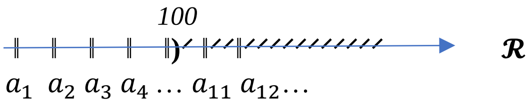


Conclusión: Una sucesión es divergente, si y solo si, su límite es infinito

Ejemplo: Sea: $(u_n) = \left((n^2)\right) = (1; 4; 9; 16; 25; \dots)$
$lím\ \left((n^2)\right) = +\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta(\varepsilon)/\forall n: (n \in N \wedge n > \delta(\varepsilon) \Longrightarrow n^2 > \varepsilon)$
Sea: $\varepsilon = 100$.
Debemos estimar un $\delta(100)$, tal que para todo número natural $n > \delta(100) \Rightarrow n^2 > 100$
Luego, si: $n^2 > 100 \Longrightarrow n > 10 \quad \therefore \quad \delta(100) = 10$

Basta tomar $n>10$ o $n \geq 11$ para que $n^2 > 100$; o sea, es suficiente considerar $n > \sqrt{\varepsilon}$ para verificar que $n^2 > \varepsilon$. Entonces: $\quad lím \left((n^2)\right) = +\infty, \quad$ ó $\quad \underset{n\to\infty}{n^2 \to +\infty}$

Gráficamente:



Sucesiones Oscilantes:
Puede suceder que una sucesión no tenga límite finito ni infinito.
Ejemplos:

(1) $(a_n) = \left((-1^n)\right) = (-1; 1;\ -1; 1;\ -1; 1; \dots)$, cuando n $\longrightarrow \infty$. los términos de esta sucesión no se aproximan a ningún número determinado. Luego, esta sucesión no tiene un límite.

(2) $(a_n) = \left((-1^n) . \frac{n+1}{n}\right) = \left(-2; \frac{3}{2};\ -\frac{4}{3};\ \frac{5}{4};\ -\frac{6}{5}; \dots\right)$. Esta sucesión no tiene límite finito ni infinito. Para cualquier entorno de los puntos 1 y -1 no se verifican las definiciones para ambos tipos de límites.

Una sucesión es oscilante si y sólo si no tiene límite.

<u>Importante</u>: Una sucesión acotada **<u>puede o no tener límite</u>**, pero si la sucesión acotada es monótona, entonces se puede asegurar que es convergente.

Por ejemplo la sucesión: $(a_n) = (1; 0; 1; 0; 1; \dots)$ está acotada pero no es monótona, entonces no es convergente.

<u>Teorema Fundamental de las Sucesiones</u>: Una sucesión monótona y acotada, si y solo. si es convergente.

Como aplicación de este Teorema se deduce que la sucesión: $(a_n) = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$ es convergente.
Para ello basta probar que: (a) es creciente. (b) está acotada superiormente:
Luego la sucesión: $(a_n) = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$ converge al *número e:*

$$lím \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) = e$$

Subsucesiones (Sucesiones parciales):

Una sucesión (b_n) es una <u>subsucesión</u> de (a_n), si y solo si, cada uno de los términos de (b_n) están contenidos en la sucesión (a_n).
O sea, dada la sucesión: $(a_n) = (a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_4; \dots a_n; \dots)$, se pueden considerar infinitos términos: $a_r;\ a_s;\ a_t; \dots$ y formar con ellos una nueva sucesión $(b_n) = (a_r;\ a_s;\ a_t; \dots)$ que estará contenida en (a_n).

Ejemplos: $\left(\frac{1}{n}\right)$ es una subsucesión de la sucesión $\left(\frac{1}{n^2}\right)$, está contenida en $\left(\frac{1}{n}\right)$
(n) es una subsucesión de la sucesión $(2n)$, está contenida en (n)

Por supuesto que, dada una sucesión, existen infinitas subsucesiones de estas.
Pueden demostrarse las siguientes **Propiedades**:

1) Si una sucesión está acotada, entonces cualquier subsucesión también está acotada.
2) Cualquier cota superior (inferior) de una sucesión, es cota superior (inferior) de la subsucesión.
3) **Teorema:** Si una sucesión converge a un límite L, entonces cualquier subsucesión converge (y) al mismo límite.
El recíproco de este Teorema no es cierto ($\nLeftarrow$).