Unidad Temática III:

Derivada y Diferencial

La Tangente

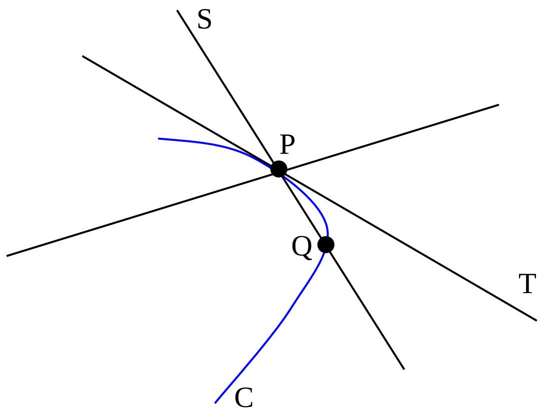
Abordaremos este tema tomando como punto de partida dos problemas básicos y concretos que son "el trazado de una recta tangente a una curva dada en un punto x_0 especificado y "la descripción de la velocidad de una partícula que se mueve en línea recta".

La solución de estos problemas han sido de interés para los matemáticos, desde los griegos (300-200 antes de J.C.), y las técnicas desarrolladas para resolver los mismos, son la columna vertebral de gran parte de la ciencia y la tecnología actuales.

Los métodos desarrollados para resolver el trazado de una recta tangente a una curva dada tienen una serie de aplicaciones importantes en la actualidad. Por ejemplo: "la dirección del movimiento de un objeto a lo largo de una curva en cada instante, se define en términos de la dirección de la recta tangente a la trayectoria del movimiento". Las órbitas de los planetas alrededor del sol y la de los satélites artificiales alrededor de la tierra, se estudian esencialmente comenzando con la información sobre la recta tangente a la trayectoria del movimiento.

Empezamos con el problema de la tangente, no solo por su importancia "histórica y práctica", sino también porque la intuición geométrica que tenemos contribuirá a hacer concreto lo que de otro modo sería una noción abstracta.

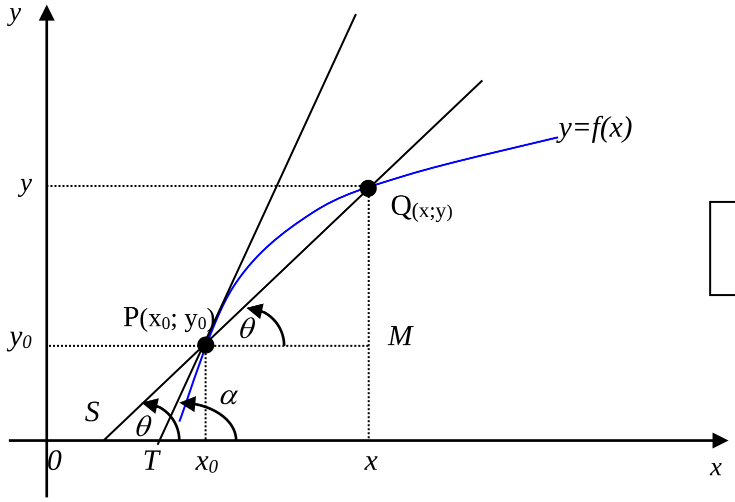
En esta figura se ilustra un procedimiento intuitivo para trazar una tangente a una curva continua C, en un punto P. Sí se hace girar una recta alrededor del punto P, generalmente cruzará la curva en P, y posiblemente en otro punto. Una recta que corte a la curva en P, y en otro punto tal como Q, secante a la curva.



A medida que el punto Q se aproxima al punto P a lo largo de la curva, la secante gira alrededor de P y parece llegar a una posición límite, la cual es la recta $\overline{PT}$ que en P coincide en dirección con la curva. En este sentido consideramos a la recta $\overline{PT}$ como límite de la secante $\overline{PQ}$.

Lo expuesto nos permite efectuar la siguiente <u>Definición</u>: "sí $\overline{PQ}$ es una secante que pasa por los puntos P y Q de una curva continua C, entonces el límite (si existe) de la secante $\overline{PQ}$, cuando Q se aproxima a P a lo largo de la curva, <u>se llama Tangente a la curva en P</u>".

Supongamos que la ecuación de la curva sea $y = f(x)$, donde $f(x)$ es una función continua y x e y son las coordenadas rectangulares usuales. Se pide trazar la tangente en el punto $P_{(x_0;y_0)}$ de la curva. Sí queremos aplicar la definición dada consideraremos otro punto $Q_{(x;y)}$ de la curva. Los puntos P y Q determinan una secante cuya pendiente es: $tg\,\theta = \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$



$$\lim_{Q \to P} S = T$$

Suponiendo que la curva tiene una tangente $\overline{PT}$, hallamos que cuando Q se aproxima a P a lo largo de la curva, la inclinación θ de la secante se aproxima a la inclinación α de la tangente, es decir: $\lim\limits_{Q \to P} \theta = \alpha$

Además, la pendiente de la secante se aproxima a la pendiente de la tangente, es decir:

$$\lim_{Q \to P} tg\,\theta = tg\,\alpha$$

Como las coordenadas de P se pueden escribir: $[x_0; f(x_0)]$, y los de Q: $[x; f(x)]$, en consecuencia: cuando $Q \to P \Leftrightarrow x \to x_0$

$$\therefore \lim_{Q \to P} tg\,\theta = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Esta expresión nos dice que la pendiente $m(x_0)$ de la tangente a la curva con ecuación $y = f(x)$ en el punto $P_{(x_0;y_0)}$, es:

$$m(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

<u>Definición de derivada de una función en un punto</u>

Como vimos, el límite que define la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en un punto $P_{(x_0;y_0)}$, es: $m(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

También el límite que define la velocidad instantánea de una partícula que se mueve sobre una recta de acuerdo con la fórmula:

$e = e(t)\ ;\ V(t_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{e(t) - e(t_0)}{t - t_0}$, tiene exactamente la misma forma.

Además, es conveniente dejar aclarado que muchos otros problemas que se presentan en la técnica implican este tipo de límite. Para evitar toda relación con un problema particular, a estos límites se les da el nombre de <u>Derivada</u>.

Sí el $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe, se llama <u>Derivada de la función $f(x)$ en el punto de abscisa x_0</u>, y se designa por: $f'(x_0)\ \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

En general, dada una función $y = f(x)$, si damos un incremento Δx (positivo o negativo) a la variable independiente, resultará para la función un incremento $f(x + \Delta x) - f(x)$, que se indica con Δy.

Si formada, luego, la "relación media" o el cociente incremental: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, y existe:

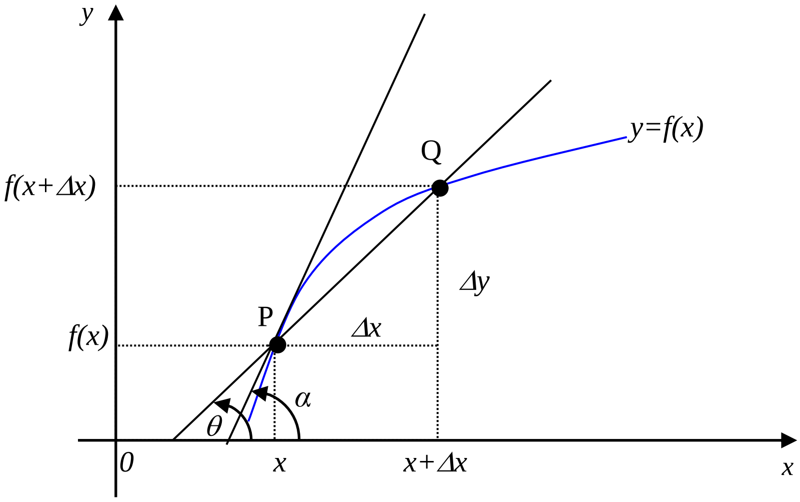
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, a este límite, si existe, se lo llama <u>Definición de</u> <u>Derivada</u> de la función $f(x)$.

<u>En símbolos</u>:

$$y = f(x)$$
$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$ ***<u>Regla General de Derivación</u>***.

Es la tangente trigonométrica del ángulo que forma la tangente geométrica a la curva en un punto considerado.



<u>NOTA</u>: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ representa la variación de la función (Δy) por unidad de variación de Δx.

Cuando $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, representa la variación de la función en un punto.

<u>NOTACIONES</u>: $y^{'}; Dy; f^{'}(x); [f(x)]^{'}; Df(x); D_x f(x); \dfrac{dy}{dx}$; (Notación de Leibniz 1646-1716)

<u>Función Derivada</u>

El valor $f^{'}(a)$ considerado como imagen para cada punto a del Dominio, donde $f(x)$ es derivable, permite definir una nueva función $f^{'}(x)$, que se llama función derivada de $f(x)$.

Es decir, $f^{'}(x)$ es la función derivada de $f(x) \Leftrightarrow f^{'}(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}; \forall a \in Df$, donde dicho límite existe.

El dominio de $f^{'}(x)$ está formado por los puntos a del Dominio de $f(x)$ para los cuales existe $f^{'}(a)$.

$$\therefore\ Df^{'} \subseteq Df$$

<u>Derivabilidad y Continuidad</u>:

Hagamos notar que, siendo $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y^{'}$, podemos escribir: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y^{'} + \varepsilon; \varepsilon$: infinitésimo; o lo que es lo mismo: $\Delta y = y^{'} \Delta x + \varepsilon \Delta x$. Luego, sí $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$.

Es decir, sí una función es derivable, es continua.

La proposición recíproca no es cierta, hay funciones continuas que no son derivables, o, en términos geométricos, hay curvas que no tienen tangente.

Es importante dejar perfectamente claro que "una función es derivable en x_0, si su derivada existe en x_0".

Continuidad de las funciones derivables

Para una función, la propiedad de ser derivable es más fuerte que la de ser continua. Es decir, la derivabilidad asegura la continuidad, mientras que el recíproco no se cumple, pues existen funciones continuas en un punto que no son derivables en él. O sea:

$$DERIVABILIDAD \underset{\not\Leftarrow}{\overset{\Rightarrow}{\text{—}}} \text{CONTINUIDAD}$$

Teorema: sí una función tiene derivada finita en un punto, entonces es continua en dicho punto. Es decir, el Teorema asegura que sí existe un número real $k \,/\, k = f'(a) \Rightarrow f(x) \text{ es continua en } a.$

Demostración:

Como $f(x)$ es derivable en el punto a, y sí $x \in Df$ es otro punto del dominio / si $x \neq a$:

podemos escribir $f(x) - f(a) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)$; calculando el límite en el punto a, es:

$$\lim_{x \to a}[f(x) - f(a)] = \lim_{x \to a}\left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)\right] = \lim_{x \to a}\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a}(x - a) = f'(a).0 = 0$$

$\uparrow$ por límite de un producto

luego: $\lim\limits_{x \to a}[f(x) - f(a)] = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) \Rightarrow f(x)$ es continua en a.

Derivadas Laterales: se obtienen considerando los límites laterales del cociente incremental.

(a) Derivada lateral derecha o derivada por la derecha: sea $f(x)$, función continua en $x = x_0$, la derivada por la derecha:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(b) Derivada lateral izquierda o derivada por la izquierda: análogamente, la derivada por la izquierda:

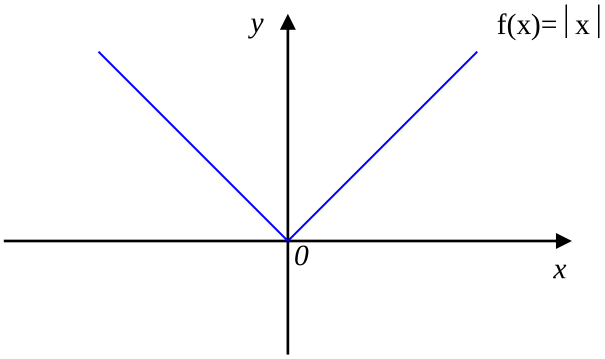
$$f'_{-}(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Como consecuencia inmediata de estas definiciones se puede demostrar el siguiente:

<u>*Teorema*</u>: sí la función $f(x)$ es continua en $x=x_0$, entonces si $f'(x_0)$ existe $\Leftrightarrow f'_{+}(x_0)=f'_{-}(x_0)$

<u>Ejemplo</u>: estudiar la derivabilidad de $f(x)=|x|$ en $x=0$

Esta función es continua $\forall\, x\in\mathbb{R}$, puesto que: $|x| = \begin{cases} x \text{ si } x\geq 0 \\ -x \text{ si } x<0 \end{cases}$



Veamos las derivadas laterales en $x_0=0$.

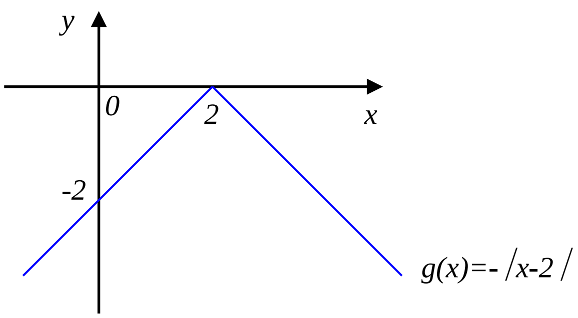
$$f'_{+}(0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{x-0}{x-0}=1\ ;\ f'_{-}(0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{-x-0}{x-0}=-1$$

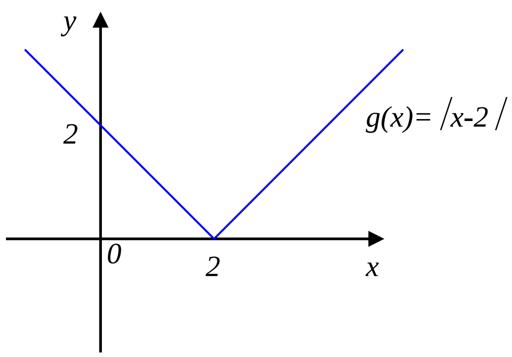
$\therefore\ \nexists\, f'(0)$, pues que: $f'_{+}(0)\neq f'_{-}(0)$

Luego, $f(x)=|x|$ no es derivable en el punto $x_0=0$, pero sí es continua en dicho punto.

Algo similar ocurre con la función: $f(x)=-|x-2|$, en el punto $x_0=2$; $f(x)$ es continua en $x_0=2$ y $\nexists\, f'(2)$, pues: $f'_{+}(2)=-1\ \wedge\ f'_{-}(2)=1$

O en: $g(x)=|x-2|$





Álgebra de Derivadas

Derivada de una suma algebraica de funciones: es igual a la suma algebraica de las derivadas de las funciones sumandos.

$y = u(x) + v(x) - w(x)$ siendo: $u(x); v(x); w(x)$ funciones de x (derivables).

Incrementando x en Δx:

$$y + \Delta y = u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x) - w(x + \Delta x)$$
$$\Delta y = u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x) - w(x + \Delta x) - u(x) - v(x) + w(x)$$
$$\Delta y = [u(x + \Delta x) - u(x)] + [v(x + \Delta x) - v(x)] - [w(x + \Delta x) - w(x)]$$

pero: $u(x + \Delta x) - u(x) = \Delta u$; $v(x + \Delta x) - v(x) = \Delta v$; $w(x + \Delta x) - w(x) = \Delta w$

luego: $\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta w$; dividiendo por Δx y pasando al límite:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = u'(x) + v'(x) - w'(x) \Rightarrow y' = u'(x) + v'(x) - w'(x)$$

La derivada de una constante: es nula.

$y = f(x) = c$; como $f(x)$ es constante, cualquiera sea el valor de x se verifica:

$$f(x + \Delta x) = f(x); \quad \therefore \quad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 0 \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$$

luego: $y' = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to o} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to o} 0 = 0$

La derivada de la variable independiente (respecto de ella misma): es la unidad.

$$y = f(x) = x; \quad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \cancel{x} + \Delta x - \cancel{x} = \Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 \quad ; \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1$$

La derivada del producto de dos funciones: es igual a la derivada de la primera función por la segunda sin derivar, más la primera función por la derivada de la segunda.

$y = u(x) . v(x)$, incremento x en Δx. Tenemos que las funciones $u(x)$ y $v(x)$ se incrementan en Δu y Δv respectivamente.

$$y+\Delta y=(u+\Delta u).(\mathrm{v}+\Delta\mathrm{v})=u\,.\,\mathrm{v}+\mathrm{u}\,.\,\Delta\mathrm{v}+\mathrm{v}\,.\,\Delta\mathrm{u}+\Delta\mathrm{u}\,.\,\Delta\mathrm{v}$$

$$\Delta y=\cancel{u\,.\,\mathrm{v}}+\mathrm{u}\,.\,\Delta\mathrm{v}+\mathrm{v}\,.\,\Delta\mathrm{u}+\Delta\mathrm{u}\,.\,\Delta\mathrm{v}-\cancel{u\,.\,\mathrm{v}}=\mathrm{u}\,.\,\Delta\mathrm{v}+\mathrm{v}\,.\,\Delta\mathrm{u}+\Delta\mathrm{u}\,.\,\Delta\mathrm{v}$$

$$\frac{\Delta\mathrm{y}}{\Delta\mathrm{x}}=u\,\frac{\Delta\mathrm{v}}{\Delta\mathrm{x}}+v\,.\,\frac{\Delta\mathrm{u}}{\Delta\mathrm{x}}+\frac{\Delta\mathrm{u}}{\Delta\mathrm{x}}\,.\,\Delta\mathrm{v}\,;$$

$$\uparrow \text{cuando}\,\Delta\mathrm{x}\to 0;\ \Delta\mathrm{v}\to 0 \qquad \text{pues}: \Delta v=v(x+\Delta x)-v(x)\underset{\Delta x\to 0}{\to} 0$$

pasando al límite para $\Delta x\to 0 \quad \Rightarrow \quad y'=u\,.\,v'+u'\,.\,v$

Para hallar la **derivada del producto de tres factores**, tenemos:

$$y=u(x)\,.\,v(x)\,.\,w(x)=u(x)\,.\,[v(x)\,.\,w(x)]$$

$$y'=u'(x)\,.\,[v(x)\,.\,w(x)]+u(x)\,.\,[v(x)\,.\,w(x)]'=u'(x)\,.\,[v(x)\,.\,w(x)]+u(x)\,.\,\left[v'(x)\,.\,w(x)+v(x)\,.\,w'(x)\right]$$

$$\therefore \quad y'=u'\,.\,v(x)\,.\,w(x)+u(x)\,.\,v'(x)\,.\,w(x)+u\,.\,v(x)\,.\,w'(x)$$

La derivada del producto de tres funciones: es igual a la suma cuyos sumandos se forman con la derivada de una función multiplicada por las otras dos funciones (sin derivar).

Luego, **generalizando**: sí: $y=u\,.\,\mathrm{v}\ldots\mathrm{w}$; siendo: *u, v, ... , w* funciones de *x*, resulta:

$$y'=u'\,.\,\mathrm{v}\ldots\mathrm{w}+u\,.\,\mathrm{v}'\ldots\mathrm{w}+\ldots+u\,.\,\mathrm{v}\ldots\mathrm{w}'$$

La derivada de una constante por una función: es igual al producto de la constante por la derivada de la función.

$\mathrm{c}=\mathrm{cte.}$; $\mathrm{y}=\mathrm{c}\,.\,\mathrm{f}(\mathrm{x})$; aplicando la regla de derivación de un producto:

$$y'=c'\,.\,f(x)+c\,.\,f'(x)=c\,.\,f'(x)$$

La derivada de un cociente de dos funciones: es igual a la derivada del numerador por el denominador sin derivar, menos el numerador por la derivada del denominador, todo dividido por el cuadrado del denominador.

$y=\dfrac{u(x)}{v(x)}$; incrementando x en Δx, tenemos:

$$y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}\ ;\ \Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}\ ;\ \Delta y=\frac{\cancel{u\,.\,v}+v\,.\,\Delta u-\cancel{u\,.\,v}-u\,.\,\Delta v}{v\,.\,(v+\Delta v)}=\frac{v\,.\,\Delta u-u\,.\,\Delta v}{v^2+v\,.\,\Delta v}$$

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{v\,.\,\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\,.\,\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2+v\,.\,\Delta v}$; teniendo en cuenta que cuando $\Delta x\to 0$, también $\Delta v\to 0$, por ser $v(x)$ una función continua (pues $v(x)$ es derivable).

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\,.\,\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\,.\,\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v\,.\,\underbrace{\Delta v}_{\substack{\Delta v\to 0\\ \Delta x\to 0}}} = \frac{u'.v + u.v'}{v^2}$$

<u>Derivada de la función logarítmica</u>:

Sea la función: $y = log_a\, x$; donde $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ $\wedge$ Dominio $f(x)=\mathbb{R}^+$

$$y + \Delta y = log_a(x+\Delta x) \Rightarrow \Delta y = log_a(x+\Delta x) - log_a(x) = log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1}{\Delta x}.log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)$. Antes de pasar al límite transformamos el cociente incremental multiplicando y dividiendo por *x*:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}.\frac{x}{\Delta x}.log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x}.log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}$$

$\uparrow$ como el logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base de la misma

haciendo: $\dfrac{x}{\Delta x} = t$; de donde $\dfrac{\Delta x}{x} = \dfrac{1}{t}$. cuando $\Delta x \to 0$; $t \to \infty$ $\wedge$ $\dfrac{1}{t} \to 0$

Sustituyendo y pasando al límite:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{x}.log_a\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = \frac{1}{x}.\lim_{t\to\infty} log_a\left(1+\frac{1}{t}\right)^t \Rightarrow$$

$\uparrow$ como el límite de una constante por una función es igual al producto de la constante por el límite de la función

Utilizando propiedades de los logaritmos de números reales, puede demostrarse que si una función $f(x)$ tiene límite finito y positivo en un punto $a \Rightarrow$ "el límite del logaritmo es el logaritmo del límite" es decir: $\lim\limits_{x\to a}[log_b\, f(x)] = log_b\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]$ $(b>1)$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}.\ log_a\left[\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right] \Rightarrow y' = \frac{1}{x}.log_a\, e;\ \text{como: } log_a\, e = \frac{1}{ln\, a} : y' = \frac{1}{x\,.\,ln\, a}$$

"La derivada del $log_a\, x$ para todo valor positivo de x, es igual al recíproco de x, por el recíproco de $ln\, a$".

Obsérvese que la derivada de: $y = log_a\, x$ (función trascendente), es $y' = \dfrac{1}{x\,.\,ln\, a}$ (función algebraica).

Derivada del logaritmo natural:

$y = ln\, x$, luego $y' = \dfrac{1}{x\,.\,ln\, e} = \dfrac{1}{x}$

Derivada de una función de función: (o derivada de una función o compuesta o Regla de la Cadena)

Sabemos que la dependencia de y con respecto a x se puede poner de manifiesto a través de una variable auxiliar u. Tengamos: $y = f(u)$, siendo $u = g(x)$. y es función u; u es función de x. Si x recibe un incremento Δx, u recibe un incremento Δu; la razón incremental $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ se puede escribir así: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta u}\,.\,\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$; $\begin{array}{c}\text{cuando}\, \Delta \mathrm{x} \to 0 \\ \text{también}\, \Delta \mathrm{u} \to 0\end{array}$ $\Rightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta u \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} \Rightarrow$

$$y'(x) = y'(u)\,.\,u'(x);\ \text{o tambien :}$$
$$y'(x) = f'(u)\,.\,\mathrm{g}'(x)$$

Derivación logarítmica:

Sea la función $y = f(x)$, si aplicando logaritmo tenemos que $ln\, y$ es una función de función (pues $ln\, y$ es función de y, e y es función de x), entonces: $(ln\, y)' = \dfrac{y'}{y}$, pués:

$ln\, y = g(y);\quad y = f(x)$

$(ln\, y)' = g'(y)\,.\,f'(x);\quad g'(y) = \dfrac{1}{y}$

$(ln\, y)' = \dfrac{f'(x)}{y} = \dfrac{y'}{y}$

Esta expresión se llama derivada logarítmica o derivación logarítmica de la función $y = f(x)$. Muchas veces resulta sumamente útil aplicar logaritmo antes de derivar y vamos a usar este método para hallar la <u>derivada de una potencia cualquiera de una función</u>.

Derivada de una potencia de x:

Sea: $y = f(x) = x^m;\ m \in \mathbb{N};\ y + \Delta y = (x + \Delta x)^m$; por comodidad escribimos:

$$x_1 = x + \Delta x \Rightarrow \Delta x = x_1 - x$$

nos queda: $y+\Delta y = {x_1}^m \Rightarrow \Delta y = {x_1}^m - x^m \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{{x_1}^m - x^m}{\Delta x} = \frac{{x_1}^m - x^m}{x_1 - x}$; efectuando el cociente de los polinomios, nos queda:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = {x_1}^{m-1} + {x_1}^{m-2}.\,x + {x_1}^{m-3}.\,x^2 + \dots\dots\dots + x_1.\,x^{m-2} + x^{m-1}$$

Sí $\Delta x \to 0$, tenemos que $x_1 \to x$ por lo tanto nos queda una suma de m sumandos iguales a x^{m-1}, es decir: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \underbrace{x^{m-1} + x^{m-1} + \dots + x^{m-1}}_{m \text{ sumandos}} = m\,.\,x^{m-1} \Rightarrow \mathrm{D}\,\mathrm{x}^{\mathrm{m}} = m\,.\,x^{m-1}$

De otra forma:

$y+\Delta y = (x+\Delta x)^m$, desarrollando el segundo miembro según el Binomio de Newton, nos queda:

$$y+\Delta y = x^m + m\,.\,\mathrm{x}^{\mathrm{m-1}}.\,\Delta\mathrm{x} + m\,.\,(m-1).\,x^{m-2}.\,\frac{\Delta\mathrm{x}^2}{2!} + m\,.\,(m-1).\,(\mathrm{m}-2).\,x^{m-3}.\,\frac{\Delta\mathrm{x}^3}{3!} + \dots + \Delta x^m$$

$$\Delta y = \cancel{x^m} + m\,.\,\mathrm{x}^{\mathrm{m-1}}.\,\Delta\mathrm{x} + m\,.\,(m-1).\,x^{m-2}.\,\frac{\Delta\mathrm{x}^2}{2!} + m\,.\,(m-1).\,(\mathrm{m}-2).\,x^{m-3}.\,\frac{\Delta\mathrm{x}^3}{3!} + \dots + \Delta x^m - \cancel{x^m}$$

$$\Delta y = m\,.\,\mathrm{x}^{\mathrm{m-1}}.\,\Delta\mathrm{x} + m\,.\,(m-1).\,x^{m-2}.\,\frac{\Delta\mathrm{x}^2}{2!} + m\,.\,(m-1).\,(\mathrm{m}-2).\,x^{m-3}.\,\frac{\Delta\mathrm{x}^3}{3!} + \dots + \Delta x^m$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m\,.\,\mathrm{x}^{\mathrm{m-1}}.\,\frac{\Delta\mathrm{x}}{\Delta\mathrm{x}} + m\,.\,(m-1).\,x^{m-2}.\,\frac{\Delta\mathrm{x}^2}{2!}\,\frac{\Delta x^2}{\Delta x} + m\,.\,(m-1).\,(\mathrm{m}-2).\,x^{m-3}.\,\frac{\Delta\mathrm{x}^3}{3!}\,\frac{\Delta x^3}{\Delta x} + \dots + \frac{\Delta x^m}{\Delta x}$$

Cuando $\Delta x \to 0$, el cociente $\Delta x / \Delta x \to 1$, pero a partir del segundo sumando vemos que aparece el cociente de potencias crecientes de Δx sobre Δx, es decir el cociente de un infinitésimo de orden superior por otro de menor orden: $su\ cociente \underset{\Delta x \to 0}{\to} 0$.

Por lo tanto, nos queda: $Dx^m = y' = m\,.\,x^{m-1}$

Casos particulares:

Exponentes negativos: $y = x^{-m}$;

$$y' = -m\,.\,\mathrm{x}^{\mathrm{-m-1}}$$

$$y' = -m\,.\,\mathrm{x}^{-(\mathrm{m}+1)} = \frac{-m}{x^{m+1}}$$

<u>Derivada de una potencia cualquiera de una función</u>

$$\text{Sea: } f(u) = y = u^m \text{; siendo: } u = g(x) \quad \wedge \quad m \in \mathbb{R}$$

Aplicando logaritmo neperiano en ambos miembros, tenemos: $ln\, y = m \,.\, ln\, u$

Aplicando derivada logarítmica: $\dfrac{y'}{y} = m \,.\, \dfrac{u'}{u} \Rightarrow y' = m \,.\, \dfrac{u'}{u} \,.\, u^m \Rightarrow y' = m \,.\, u^{m-1} \,.\, u'$

<u>Derivada de la función exponencial</u>

$$y = a^u ; \quad a = constante \,, u \;\; función\ de\ x$$

$$ln\, y = u \,.\, ln\, a \;\Rightarrow\; \frac{y'}{y} = u' \,.\, ln\, a \;\Rightarrow\; y' = a^u \,.\, ln\, a \,.\, u'$$

<u>Casos particulares</u>:

(a) Sea: $y = e^u$; $u = g(x)$ $\qquad ln\, y = u \,.\, ln\, e \;\Rightarrow\; \dfrac{y'}{y} = u' \,.\, ln\, e = y' = e^u \,.\, u'$

(b) Sea: $y = a^x$; $ln\, y = x \,.\, ln\, a \;\Rightarrow\; \dfrac{y'}{y} = x' \,.\, ln\, a = ln\, a \;\Rightarrow\; y' = a^x \,.\, ln\, a$

(c) Sea: $y = e^x$; (<u>función exponencial natural)</u>

$$ln\, y = x \,.\, ln\, e \;\Rightarrow\; \frac{y'}{y} = x' \,.\, ln\, e = 1 \;\Rightarrow\; y' = y \;\Rightarrow\; y' = e^x$$

(d) <u>Caso de base y exponente variable. Derivada de la función potencial-exponencial (o función exponencial compuesta)</u>.

La función donde tanto la base como el exponente son funciones de x, se llama "Función Exponencial Compuesta".

<u>Por ejemplo</u>: $y = (sen\, x)^{x^2}$; $y = x^{tg\, x}$; $y = x^x$; $y = (ln\, x)^x$; y en general toda función del tipo:

$y = u^v$, siendo u y v funciones de x.

$$ln\, y = v \,.\, \ln u \;\Rightarrow\; \frac{y'}{y} = v' \,.\, \ln u + v \,.\, \frac{u'}{u} \;\Rightarrow\; y' = \left(v' \,.\, \ln u + v \,.\, \frac{u'}{u} \right) .\, u^v = u^v \,.\, v' \,.\, \ln u + v \,.\, \frac{u'}{u} \,.\, u^v$$

$$y' = \underbrace{u^v \,.\, v' \,.\, ln\, u}_{(1)} + \underbrace{v \,.\, u' \,.\, u^{v-1}}_{(2)}$$

(1)- Este término es la derivada de u^v considerando a v como función y a u como constante (función exponencial).

(2)- Este término es la derivada de u^v considerando a u como función y a v como constante (función potencial).

<u>Derivada de la raíz enésima de una función</u>

$$y = \sqrt[n]{u}\,;\; u = f(x)$$

$y = u^{1/n}$, derivo como potencia: $y' = \frac{1}{n}.u^{\frac{1}{n}-1}.u' = \frac{1}{n}.u^{\frac{1-n}{n}}.u' = \frac{1}{n}.\frac{1}{u^{\frac{n-1}{n}}}.u'$

$$y' = \frac{u'}{n.\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

<u>Casos particulares</u>:

(a) Si se trata de una raíz cuadrada: $y = u^{1/2}$; $y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

(b) Sea la función: $y = \sqrt{x} = x^{1/2}$; $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

<u>Derivadas de funciones inversas</u>

Sí $f(x)$ es una función biyectiva con derivada finita no nula en el punto a, entonces $f^{-1}(x)$ tiene derivada finita en $f(a)$, y esta derivada es: $\frac{1}{f'(a)}$.

<u>Demostración</u>: por definición de función inversa: $\forall x : f^{-1}[f(x)] = x$, sí derivamos esta expresión, aplicando la derivada de una función de función para derivar el primer miembro; resulta:

$$f(x) \circ g(x) = f[g(x)] \Rightarrow (f(x) \circ g(x))' = f'[g(x)].g'(x)$$

$f^{-1'}[f(x)].f'(x) = 1 \Rightarrow f^{-1'}[f(x)] = \frac{1}{f'(x)}$; sí $f'(x) \neq 0$

<u>Derivada de funciones trigonométricas</u> (o circulares directas)

<u>Derivada de la función seno</u>:

Sea: $y = sen\, x$

$$y + \Delta y = sen\left(x + \Delta x\right) \Rightarrow \Delta y = sen\left(x + \Delta x\right) - sen\, x\,;$$

recordando que: $sen\,\alpha - \text{sen}\,\beta = 2\,\text{sen}\left(\dfrac{\alpha - \beta}{2}\right).\cos\left(\dfrac{\alpha + \beta}{2}\right)$

$$\Delta y = 2\,sen\left(\frac{\cancel{x} + \Delta x - \cancel{x}}{2}\right).cos\left(\frac{x + \Delta x + x}{2}\right) = 2\,sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right).cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\,sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right).cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}.cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}}_{1}.\lim_{\Delta x \to 0} cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = cos\, x;$$

$$y' = cos\, x$$

sí: $y = sen\, u$; $u = g(x)$, aplicando derivada de función de función:

$$y' = cos\, u\, .u'$$

<u>Derivada de la función coseno</u>:

Sea: $y = cos\; x$

$$y + \Delta y = cos\left(x + \Delta x\right) \Rightarrow \Delta y = cos\left(x + \Delta x\right) - cos\; x\,;$$

recordando que: $cos\,\alpha - cos\,\beta = -2\,sen\left(\dfrac{\alpha - \beta}{2}\right).sen\left(\dfrac{\alpha + \beta}{2}\right)$

$$\Delta y = -2\,sen\left(\frac{\cancel{x} + \Delta x - \cancel{x}}{2}\right).sen\left(\frac{x + \Delta x + x}{2}\right) = -2\,sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right).sen\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-2\,sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right).\,sen\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\frac{-\,sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}.\,sen\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\Rightarrow$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\,\mathrm{sen}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}}_{-1}.\lim_{\Delta x\to 0}\mathrm{sen}\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=-sen\,\mathrm{x};$$

$$y'=-sen\,x$$

sí: $y = cos\,u$; $u = f(x)$, aplicando derivada de función de función:

$$y'=-sen\;u\,.u'$$

<u>Derivada de la función tangente</u>

$y = tg\;x = \dfrac{sen\,x}{cos\,x}$; derivamos como cociente, y obtenemos:

$$y=\frac{1}{cos^2\,x}=sec^2\,x\,;$$

sea: $y = tg\,u$; $u = f(x)$;

$$y'=\frac{u'}{cos^2\,u}=sec^2\,u\,.u'$$

<u>Derivadas de funciones Circularas Inversas</u> (Funciones ciclométricas)

<u>Derivada de la función arco seno</u>

Sea: $y = arc\;sen\,x$; donde: $Df = [-1;1]$; $Rg = \left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; cuya función inversa es: $x = sen\;y \quad (1)$; aplicando la regla de derivación de funciones inversas, tenemos:

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{\cos y}$ (2): dado que: $sen^2\,y+\cos^2 y=1 \Rightarrow \cos y=\sqrt{1-sen^2\,y}$; por (1):

$\cos y=\sqrt{1-x^2}$; reemplazando en (2): $\dfrac{dy}{dx}=y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; para: $-1\le x\le 1$

$$\therefore \quad y=arc\,sen\,u \Rightarrow y'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}};\ \text{siendo } u=g(x)$$

Obsérvese que tomamos la raíz con el signo positivo, porque la función $y=arc\,sen\,x$ se define en el intervalo $\left[-\pi/2\le y\le \pi/2\right]$; o sea en el primero y cuarto cuadrantes donde $\cos y\ge 0$.

Derivada de la función arco coseno:

Sea: $y=arc\cos x$; donde: $Df=[-1;1]$; $Rg=[0;\pi]$; cuya función inversa es: $x=\cos y$, derivando, se tiene:

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{-sen\,y}=-\dfrac{1}{sen\,y}$; puesto que: $sen\,y=\sqrt{1-\cos^2 y}=\sqrt{1-x^2}$;

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}};\qquad \frac{dy}{dx}=y'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}};\ \text{para: } -1\le x\le 1$$

$$\therefore \quad y=arc\cos u \Rightarrow y'=\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}};\ \text{siendo } u=g(x)$$

En la igualdad $sen\,y=\sqrt{1-\cos^2 y}$, tomamos la raíz con signo positivo, porque la función $y=arc\cos x$ esta definida en el intervalo $0\le y\le\pi$, es decir en el primero y segundo cuadrantes, donde $sen\,y\ge 0$.

Derivada de las funciones hiperbólicas directas

Derivada de la función: $y=Sh\,x$; $\quad y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2} \Rightarrow y'=\dfrac{1}{2}e^x+e^{-x}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=Ch\,x$

Derivada de la función: $y=Ch\,x$; $\quad y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2} \Rightarrow y'=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=Sh\,x$

Casos particulares: aplicando derivada de función de función, tenemos:

$$y=Sh\,u \Rightarrow y'=Ch\,u\,.u'; \qquad \text{y} \qquad y=Ch\,u \Rightarrow y'=Sh\,u\,.u'$$

Derivadas de funciones hiperbólicas inversas

Para derivar funciones hiperbólicas inversas se procede de forma análoga a la empleada para funciones circulares inversas.

(I) $y = Arg\ Sh\, x \Rightarrow x = Sh\, y$; $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \dfrac{1}{Ch\, y} = \dfrac{1}{\sqrt{1+Sh^2\, y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;

$Ch^2\, \alpha - Sh^2\, \alpha = 1$

(II) $y = Arg\ Ch\, x \Rightarrow x = Ch\, y$; $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \dfrac{1}{Sh\, y} = \dfrac{1}{\sqrt{Ch^2\, y - 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

(III) $y = Arg\ Th\, x \Rightarrow x = Th\, y$; $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{Ch^2\, y}} = Ch^2\, y = \dfrac{1}{1-Th^2\, y} = \dfrac{1}{1-x^2}$

Derivada de funciones definidas implícitamente

Sea: $F(x;y) = 0$. Sí existe una función $y = f(x)$ definida en un cierto intervalo $[a;b]$ tal que $F[x; f(x)] = 0,\ \forall\, x \in [a;b]$, diremos que la ecuación $F(x;y) = 0$ define y como función implícita de x.

En ocasiones resulta factible "despejar" y de $F(x;y) = 0$, transformándose así la función implícita en explícita, pero esta transformación resulta a veces penosa y otras imposible.

La teoría de funciones implícitas (existencia y derivabilidad) se verá al estudiar funciones de dos variables, pero podemos agregar que una ecuación $F(x;y) = 0$, generalmente implica una o más relaciones funcionales.

Entonces "Una función cuya existencia está implicada en una ecuación $F(x;y) = 0$, se llama *función implícita*".

Ejemplos:

(1) sea la ecuación: $x\,.y + x - 2y - 1 = 0$, derivando se obtiene: $x'\ .\, y + x\, .\, y' + x' - 2y' - \underbrace{1'}_{0} = 0$

$$y + x\,.y' + 1 - 2y' = 0 \Rightarrow (x-2).y' + y + 1 = 0 \Rightarrow y' = \frac{-y-1}{x-2} = \frac{y+1}{2-x}$$

(2) sea la ecuación: $x^2 .\, y + 3y - 4 = 0$, derivando, se tiene:

$$x^2\ .\, y' + 2x\, .\, y + 3y' = 0 \Rightarrow \left(x^2+3\right).y' + 2x\, .\, y = 0 \Rightarrow y' = \frac{-2x.y}{x^2+3}$$

En general, para hallar la derivada y' se puede seguir uno de los procedimientos que se detallan a continuación:

(i) "Despejar" y, si es posible, derivar luego con respecto a x. Este procedimiento debemos evitar a menos que se trate de una ecuación sencilla.
(ii) Derivar la ecuación dada con respecto de x, teniendo en cuenta que y es función de x, y despejar después y'. Esta forma de efectuar la derivación recibe el nombre de "*Derivación Implícita*".

Derivadas sucesivas: (o derivadas de orden superior)

Supongamos que la función $y = f(x)$ es derivable en el intervalo $[a;b]$. Los valores $f'(x)$ dependen generalmente de x, es decir, como ya hemos visto, la derivada $f'(x)$ también es una función de x.
La derivada de la primera derivada se llama segunda derivada o derivada de segundo orden de la función inicial, y se designa: $y''; \quad f''(x); \quad \dfrac{d^2y}{dx^2}; \quad D^2y; \quad \dfrac{d^2}{dx^2}f(x); \quad y^{(2)}$

La derivada de la segunda derivada se denomina derivada tercera o derivada de tercer orden, y se designa: $y'''; \quad f'''(x); \quad \dfrac{d^3y}{dx^3}; \quad D^3y; \quad \dfrac{d^3}{dx^3}f(x); \quad y^{(3)}$

En consecuencia, diremos que la derivada n-sima (o de orden n) de una función $f(x)$ es, entonces, la derivada de la derivada de orden *n-1* (supuesta derivada) de $f(x)$. Diremos también, en este caso, que $f(x)$ es derivable n veces en el intervalo $[a;b]$. Simbólicamente podemos escribir: $f^{(n)}(x) = Df^{(n-1)}(x) = y^{(n)}$.

Es obvio que él calculo de las derivadas superiores de $f(x)$ se efectúa aplicando reiteradamente las reglas de derivación que hemos estudiado.

Digamos, asimismo, que para ciertas funciones es factible encontrar una expresión de la derivada enésima en función de n. El procedimiento consiste en calcular un cierto número de derivadas sucesivas, tantas como sea necesarias, para inferir una ley de formación para, posteriormente, aplicar el principio de inducción completa.

Ejemplo: Sea la función: $f(x) = e^{\alpha x}$

$$f'(x) = a\,.\,e^{\alpha x}; \quad f''(x) = a^2\,.\,e^{\alpha x}; \quad f'''(x) = a^3\,.\,e^{\alpha x}; \ldots\ldots\ldots; \; f^{(n-1)}(x) = a^{(n-1)}\,.\,e^{\alpha x};$$

$$f^{(n)}(x) = Df^{(n-1)}(x) = a^n\,.\,e^{ax}$$

Por último, digamos que las funciones más comunes, y que resultan de particular importancia, son infinitamente derivables, es decir, que admiten derivadas de orden n cualquiera. Por ejemplo, la función exponencial $y = e^x$, para la cual $D^{(n)}e^x = e^x; \; \forall n \in \mathbb{Z}$; la función $y = e^{ax}$ que hemos visto; los polinomios, etc.

Diferencial de una función. Definición. Parte principal del incremento

Sea la función $y = f(x)$ que suponemos derivable en el intervalo $(a;b)$ y, por ende, continua en el $[a;b]$.

En un punto $x \in (a;b)$, la derivada de la función se define como: $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$; donde podemos observar que cuando $\Delta x \to 0$, la razón $\Delta y / \Delta x$ tiende a un número determinado $f'(x)$, y por lo tanto esta razón incremental se diferencia de la derivada $f'(x)$ en un infinitésimo. Es decir, por una propiedad de los infinitésimos:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon(\Delta x)$, donde $\varepsilon(\Delta x) \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 0$, de donde

$\Delta y = f'(x).\Delta x + \varepsilon(\Delta x).\Delta x$. En virtud de la continuidad de $f(x)$, se sabe que Δy es un infinitésimo para $\Delta x \to 0$. También sabemos que $f'(x).\Delta x$ es un infinitésimo equivalente a Δy; o sea que:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overbrace{f'(x).\Delta x}^{dy}}{\Delta y} = 1$$

Asimismo, sabemos que $\varepsilon(\Delta x).\Delta x$ es un infinitésimo de orden superior a Δy, o sea que:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varepsilon(\Delta x).\Delta x}{\Delta y} = 0, \quad \textit{por lo tanto} \quad \Delta y = f'(x).\Delta x + \varepsilon(\Delta x).\Delta x$$

$\varepsilon(\Delta x)$ es un infinitésimo para $\Delta x \to 0$; Δx es un infinitésimo; $f'(x) =$ constante.

$\varepsilon_{(x)}.\Delta x$ es un infinitésimo de orden superior a $\varepsilon(\Delta x)$ y Δx; tiende más rápidamente a cero y por lo tanto no influye prácticamente en los valores del incremento Δy; cuando Δx es muy pequeño.

$f'(x).\Delta x$ es infinitésimo del mismo orden que Δx.

Por ejemplo: $x^2;\ x^5;\ x^7$ son infinitésimos para $x \to 0$; $x^7 \to 0$ tiende más rápidamente a cero que x^2. Luego, x^7 es infinitésimo de orden superior a x^2.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x).\Delta x + \varepsilon.\Delta x}{f'(x).\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \underbrace{\frac{\varepsilon}{f'(x)}}_{\substack{\text{cuando } \Delta x \to 0 \\ \varepsilon \to 0}} \right) = 1 + 0 = \overset{o\ bien\ (\otimes)}{1} \quad ; \Delta y \cong dy$$

$$\therefore \quad \Delta y = \underbrace{f'(x).\Delta x}_{(1)} + \underbrace{\varepsilon_{(x)}.\Delta x}_{(2)}$$

El primer *(1)* sumando recibe el nombre de "<u>Parte principal del incremento</u>" que es lineal con relación a Δx. El segundo *(2)* "<u>Término complementario</u>".

Sí $f'(x) \neq 0$, la parte principal del incremento recibe el nombre de diferencial de la función, $y = f(x)$ y se designa por: $dy = d\ f(x) = f'(x).\Delta x$.

Definición de Diferencial

"Diferencial de una función $y = f(x)$ derivable se define como el producto de su derivada por el incremento de la variable independiente".

Expresión analítica de la diferencial

Diferencial de la variable independiente

Sea la función identidad: $y = f(x) = x$; aplicando la fórmula para calcular la diferencial: $dy = f'(x).\Delta x$; pero como: $y = x$ resulta: $dy = dx \Rightarrow dy = f'(x).\Delta x$. Sabemos que la derivada: $f'(x) = 1 \Rightarrow dx = 1.\Delta x \Rightarrow dx = \Delta x$. Con lo que queda probado que el incremento de la variable independiente es igual a la diferencial de esa variable.

Luego: $dy = f'(x).dx$ que es la <u>Expresión Analítica de la Diferencial</u>.

$(\otimes)$ ***Relación de la diferencial con el incremento*** $\underline{\Delta y}$:

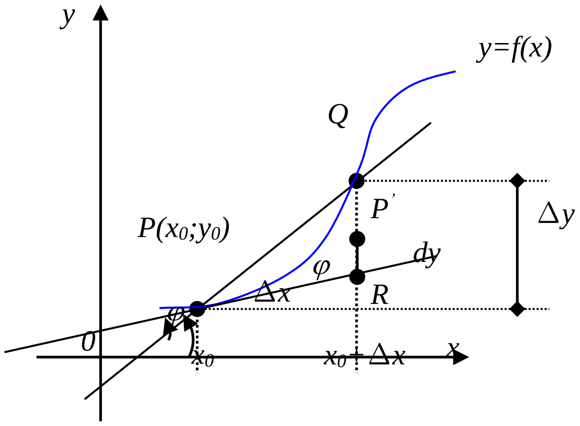
Sí $\Delta x \to 0$, y es $y' \neq 0$, los infinitésimos dy y Δy son equivalentes, es decir:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{y'\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.\frac{1}{y'} = y'.\frac{1}{y'} = 1$$

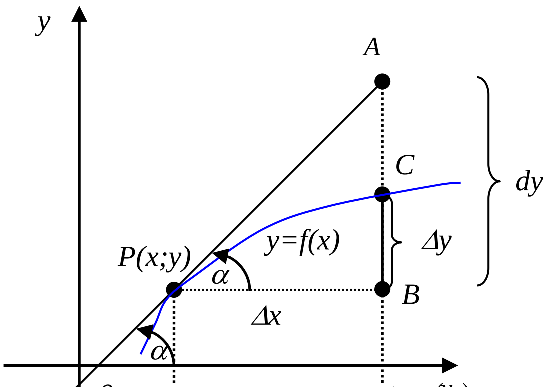
Significado o interpretación geométrica de la diferencial

$$dy = f'(x).dx \qquad y' = tg\,\varphi = \frac{P'R}{PR};\ dx = \Delta x = \overline{PR} \Rightarrow dy = y'.dx = \frac{\overline{P'R}}{\overline{PR}}.\overline{PR} = \overline{P'R}$$

En este caso: $dy < \Delta y$;



$$tg\,\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{PB}} \Rightarrow dy = y'.dx = \frac{\overline{AB}}{\overline{PB}}.\overline{PB} = \overline{AB}; \qquad dy > \Delta y$$



Geométricamente la diferencial de una función: $y = f(x)$ es el incremento que sufre la recta tangente a la curva en el punto x cuando se pasa de x a $x + \Delta x$.

La longitud $\overline{AB}$ corresponde al diferencial de $f(x)$ en x, respecto del incremento Δx.

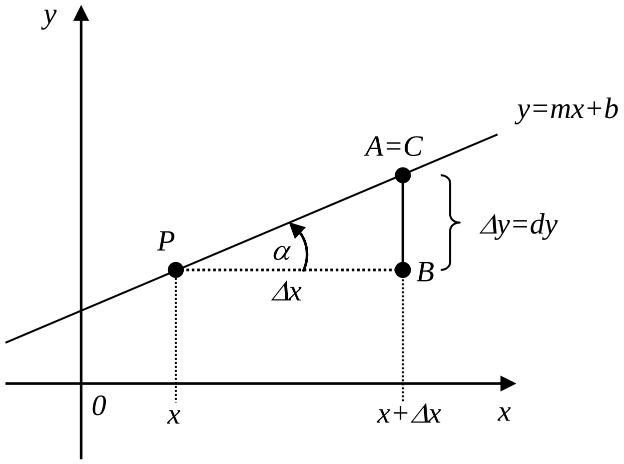
Por otra parte, la longitud $\overline{BC}$ comprende al incremento: $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$.

En un entorno de x, cuando menor es el número $\Delta x\ (\Delta x \to 0)$, más se aproximan las longitudes $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$. *O sea, la resta* $\underset{\Delta x \to 0}{\overline{AB} - \overline{BC}} \to 0$. Por lo tanto, sí reemplazamos $\overline{BC}$ por $\overline{AB}$ estamos reemplazando en el gráfico de $f(x)$, entre x y Δx por la recta tangente a la curva en el punto: $[x;f(x)]\ (P(x;y))$ por lo tanto podemos aproximar el valor de $f(x+\Delta x)$ conociendo el valor de $f(x)$ y el diferencial de f respecto de Δx:

$$f(x+\Delta x) \cong f(x) + f'(x).\Delta \text{x} \ ; \text{ ó } \ f(x+\Delta x) \cong f(x) + d\ f(x)$$

El error que se comete al reemplazar $f(x+\Delta x)$ por $f(x)+d\ f(x)$, puede hacerse menor que cualquiera: $\varepsilon > 0$, prefijado, sí se toma Δx convenientemente pequeño.

Luego: $f(x+\Delta x) - f(x) \cong f'(x)\Delta x \quad \therefore \quad \Delta y \cong dy$



<u>Reglas de diferenciación</u>

En realidad, los cálculos de la diferencial de una función se reducen al cálculo de la derivada, ya que al multiplicar la última por la diferencial de la variable independiente se obtiene "la diferencial de la función".

(1) la diferencial de la suma (resta) de dos funciones derivables u y v es igual a la suma (resta) de las diferenciales de esas funciones: $d(u \pm v) = du \pm dv$

(2) $d(u\ .\ v) = u\ .\ dv + v\ .\ du$

Sí:

$$y = u(x)\ .v(x) = u\ .\ v \Rightarrow dy = y'.\ dx = \left(u\ .\ v' + u'\ .\ v\right).\ dx = u\ .\ \underbrace{v'.\ dx}_{dv} + v\ .\ \underbrace{u'.\ dx}_{du} = u\ .\ dv + v\ .\ du$$

<u>La diferencial de una función compuesta</u>:

Sea: $y = f(u);\ u = g(x)$; o sea: $y = f[g(x)]$

Sabemos que: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} = f_u^{'}(u).g_x^{'}(x)$; luego: $dy = f_u^{'}(u) \,.\, g_x^{'}(x) \,.\, dx$; pero: $g_x^{'}dx = du$

$\therefore \quad dy = f_u^{'}(u) \,.\, du = f^{'}[g(x)] \,.\, dg(x)$

Es decir que: “la diferencial de una función compuesta tiene la misma forma que tendría en el caso en que la variable intermedia u fuere la variable independiente”. En otras palabras, la expresión de la diferencial no depende de que la variable sea independiente o sea, a su vez, función de otra variable. Esta importante propiedad de la diferencial, que se usa con frecuencia, recibe el nombre de <u>INVARIANCIA DE LA DIFERENCIAL</u>.

<u>Diferenciales de orden superior</u>

Supongamos la función $y = f(x)$. La diferencial de esta función: $dy = f^{'}(x)dx$, es una función de x. Pero de x depende solamente el primer factor: $f^{'}(x)$, puesto que el segundo: dx es un incremento de la variable x, que no depende del valor de esta.

En consecuencia, podemos denominar “a la diferencial de la diferencial de una función con el nombre de diferencial segunda o diferencial de segundo orden”, y se designa: $d^2y = d(dy)$.

De la expresión de la diferencial segunda: $d^2y = \left[f^{'}(x) \,.\, dx\right]^{'} dx$, como dx es independiente de x, al derivar, dx sale fuera del signo de derivación. Luego: $d^2y = f^{''}(x) \,.\, (dx)^2$. En la potencia del diferencial se suele omitir el paréntesis: $(dx)^2 = dx^2$, entendiéndose que se trata del cuadrado de la expresión dx; $(dx)^3 = dx^3$; y así sucesivamente.

Se llama diferencial tercera o diferencial de tercer orden de una función, a la diferencial de la diferencial segunda de esta función: $d^3y = d\left(d^2y\right) = \left[f^{''}(x) \,.\, dx^2\right]^{'} .dx = f^{'''}(x) \,.\, dx^3$.

En general se llama diferencial n-sima o diferencial de n-simo orden a la diferencial primera de la diferencial de orden (n-1): $d^n y = d\left(d^{(n-1)}y\right) = \left[f^{(n-1)}(x) \,.\, dx^{n-1}\right]^{'} .dx = f^{(n)}(x) \,.\, dx^n$