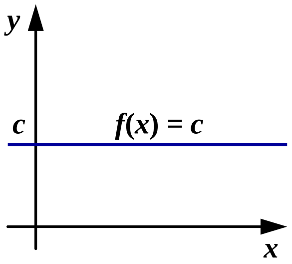
ÁLGEBRA DE DERIVADAS

1. Derivada de una constante: la derivada de una constante es nula.

Sea $y = f(x) = c$; como $f(x)$ es constante, cualquiera sea el valor de *x* se verifica:

$$f(x+\Delta x) = f(x)$$

$$\therefore \ \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$$



Por lo tanto: $y' = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = 0$

Ejemplos

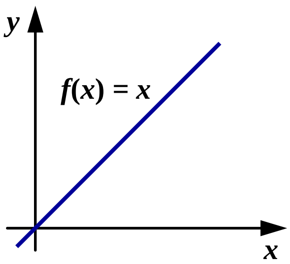
a) $y = -5 \quad \Rightarrow \quad y' = 0$ **b)** $y = \pi \quad \Rightarrow \quad y' = 0$

2. Derivada de la variable independiente (respecto de ella misma): la derivada de la variable independiente, respecto de si misma, es igual a la unidad.

$$y = f(x) = x$$

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \cancel{x} + \Delta x - \cancel{x} = \Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 \quad \Rightarrow \quad y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1$$



3. Derivada de una suma algebraica de funciones: es igual a la suma algebraica de las derivadas de las funciones dadas.

Sea $y = u(x) + v(x) - w(x)$; siendo: $u(x), v(x), w(x)$ funciones de *x* (derivables)

Incrementando *x* en Δx:

$$y + \Delta y = u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x) - w(x+\Delta x)$$

$$\Delta y = u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x) - w(x+\Delta x) - u(x) - v(x) + w(x)$$

$$\Delta y = [u(x+\Delta x) - u(x)] + [v(x+\Delta x) - v(x)] - [w(x+\Delta x) - w(x)]$$

Teniendo en cuenta que: $u(x+\Delta x) - u(x) = \Delta u$, $v(x+\Delta x) - v(x) = \Delta v$, $w(x+\Delta x) - w(x) = \Delta w$

Resulta: $\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta w$

Si ahora dividimos por Δx y aplicamos límite cuando $\Delta x \to 0$, se tendrá:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = u'(x) + v'(x) - w'(x)$$

$$y' = u'(x) + v'(x) - w'(x)$$

Ejemplos

a) $y = x + \ln 7 \quad \Rightarrow \quad y' = 1 + 0 = 1$ **b)** $y = -x - e^2 \quad \Rightarrow \quad y' = -1 - 0 = -1$

4. Derivada del producto de dos funciones: es igual a la derivada de la primera función por la segunda sin derivar, más la primera función por la derivada de la segunda.

Sea $y=u(x)\cdot v(x)$; se incrementa x en Δx, por lo tanto las funciones $u(x)$ y $v(x)$ se incrementarán en Δu y Δv, respectivamente.

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)\cdot(v+\Delta v)=u\cdot v+u\cdot\Delta v+v\cdot\Delta u+\Delta u\cdot\Delta v$$

$$\Delta y=u\cdot v+u\cdot\Delta v+v\cdot\Delta u+\Delta u\cdot\Delta v-u\cdot v=u\cdot\Delta v+v\cdot\Delta u+\Delta u\cdot\Delta v$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}+v\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\Delta v$$

Como $\Delta v=v(x+\Delta x)-v(x)$, entonces si $\Delta x\to 0$, también sucederá lo mismo con Δv, por ser $v(x)$ una función continua (pues $v(x)$ es derivable).

$$\text{Luego:}\quad \underset{\Delta x\to 0}{lím}\frac{\Delta y}{\Delta x}=u\cdot\underset{\Delta x\to 0}{lím}\frac{\Delta v}{\Delta x}+v\cdot\underset{\Delta x\to 0}{lím}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\underset{\Delta x\to 0}{lím}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\underset{\Delta x\to 0}{lím}\Delta v=u\cdot v'+v\cdot u'$$

$$y'=u'\cdot v+u\cdot v'$$

4.1 Derivada del producto de tres factores: es igual a la suma cuyos sumandos se forman con la derivada de una función multiplicada por las otras dos funciones (sin derivar).

$$y=u(x)\cdot v(x)\cdot w(x)=u(x)\cdot[v(x)\cdot w(x)]$$

$$y'=u'(x)\cdot[v(x)\cdot w(x)]+u(x)\cdot[v(x)\cdot w(x)]'=u'(x)\cdot[v(x)\cdot w(x)]+u(x)\cdot[v'(x)\cdot w(x)+v(x)\cdot w'(x)]$$

$$y'=u'(x)\cdot v(x)\cdot w(x)+u(x)\cdot v'(x)\cdot w(x)+u(x)\cdot v(x)\cdot w'(x)$$

Generalizando: si $y=u\cdot v\cdots w$, siendo $u,v,\ldots,w$ funciones de x, resulta:

$$y'=u'\cdot v\cdots w+u\cdot v'\cdots w+u\cdot v\cdots w'$$

5. Derivada de una constante por una función: es igual al producto de la constante por la derivada de la función.

Sea $y=c\cdot f(x)$, aplicando la regla de derivación de un producto, resulta:

$$y'=c'\cdot f(x)+c\cdot f'(x)=c\cdot f'(x)$$

Ejemplo

$$y=2x+\frac{x}{3}\cdot(x-\operatorname{sen}\pi)\quad\Rightarrow\quad y'=2\cdot 1+\left[\frac{1}{3}\cdot(x-\operatorname{sen}\pi)+\frac{x}{3}\cdot(1-0)\right]=2+\frac{1}{3}\cdot(x-\operatorname{sen}\pi)+\frac{x}{3}$$

$$y'=2+\frac{1}{3}\cdot(x-0)+\frac{x}{3}=2+\frac{2}{3}x$$

6. Derivada de un cociente: es igual a la derivada del numerador por el denominador sin derivar, menos el numerador por la derivada del denominador, todo dividido por el cuadrado del denominador.

Sea $y=\dfrac{u(x)}{v(x)}$, incrementando x en Δx, tenemos:

$$y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v};\quad \Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v};\quad \Delta y=\frac{u\cdot v+v\cdot\Delta u-u\cdot v-u\cdot\Delta v}{v\cdot(v+\Delta v)}=\frac{v\cdot\Delta u-u\cdot\Delta v}{v^2+v\cdot\Delta v}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v\cdot\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\cdot\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2+v\cdot\Delta v}$$

Recordando que cuando $\Delta x\to 0$, también sucederá lo mismo con Δv, resulta:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\cdot\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\cdot\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2+v\cdot\Delta v}=\frac{v\cdot u'-u\cdot v'}{v^2}\quad\Rightarrow\quad y'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$$

Ejemplo

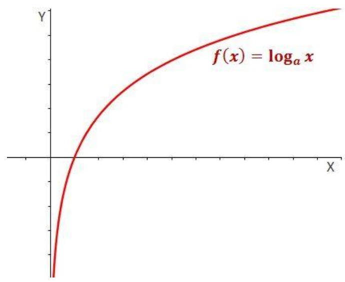
$$y=\frac{-4x+\cos\dfrac{\pi}{2}}{2x-3}\quad\Rightarrow\quad y=\frac{-4x}{2x-3}\quad\Rightarrow\quad y'=\frac{(-4\cdot 1)\cdot(2x-3)-(-4x)\cdot(2\cdot 1-0)}{(2x-3)^2}=$$

$$y'=\frac{-4(2x-3)+8x}{(2x-3)^2}=\frac{(-8x+12)+8x}{(2x-3)^2}$$

$$y'=\frac{12}{(2x-3)^2}$$

7. Derivada de la función logarítmica

Sea la función: $y=\log_a x$, donde $a\in\Re^+-\{1\}$ y Dominio $f(x)=\Re^+$



$$y+\Delta y=\log_a(x+\Delta x)\quad\Rightarrow\quad \Delta y=\log_a(x+\Delta x)-\log_a(x)=\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\cdot\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

Multiplicando y dividiendo por *x*, resulta: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{x}{\Delta x}\cdot\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)=\dfrac{1}{x}\cdot\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$

Haciendo: $\dfrac{x}{\Delta x}=t$, se tendrá $\dfrac{\Delta x}{x}=\dfrac{1}{t}$; cuando $\Delta x\to 0\ \Rightarrow\ t\to\infty\ \wedge\ \dfrac{1}{t}\to 0$

Sustituyendo y pasando al límite: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{1}{x}\cdot\lim\limits_{t\to\infty}\log_a\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t$

Utilizando propiedades de los logaritmos de números reales, puede demostrarse que si una función $f(x)$ tiene límite finito y positivo en el valor *a*, entonces "el límite del logaritmo es el logaritmo del límite", es decir: $\lim\limits_{x\to a}\left[\log_b f(x)\right]=\log_b\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]$ (con $b>1$)

Por lo tanto: $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{1}{x}\cdot\lim\limits_{t\to\infty}\log_a\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t=\dfrac{1}{x}\cdot\log_a\left[\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t\right]=\dfrac{1}{x}\cdot\log_a e=\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{\ln a}$

$$\text{Finalmente: } y=\log_a x\ \Rightarrow\ y'=\frac{1}{x\cdot\ln a}$$

Luego, "la derivada del $\log_a x$ para todo valor positivo de x, es igual al recíproco de x, por el recíproco de $\ln a$".

Obsérvese que la derivada de $y=\log_a x$, función trascendente, es $y'=\dfrac{1}{x\cdot\ln a}$, función algebraica.

Ejemplo: $y=\log_2 x\quad\Rightarrow\quad y'=\dfrac{1}{x\cdot\ln 2}=\dfrac{1}{\ln 2\cdot x}$

7.1 Derivada del logaritmo natural

$$\text{Si } y=\ln x\ \Rightarrow\ y'=\frac{1}{x\cdot\ln e}=\frac{1}{x}$$

8. Derivada de una función de función (o Derivada de una función compuesta o Regla de la cadena)

Consideremos $y=f(u)$, siendo $u=g(x)$

La razón incremental $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ puede escribirse: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$

Como $\Delta u=u(x+\Delta x)-u(x)$, entonces si $\Delta x\to 0$, también sucederá lo mismo con Δu, luego:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\ \Rightarrow\ y'(x)=y'(u)\cdot u'(x)=f'(u)\cdot g'(x)$$

Ejemplo: $y=\ln\left(\dfrac{3}{2}x-\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{4}\right)\ \Rightarrow\ y=\ln\left(\dfrac{3}{2}x-1\right)\ \Rightarrow\ y'=\left[\ln\left(\dfrac{3}{2}x-1\right)\right]'\cdot\left(\dfrac{3}{2}x-1\right)'$

$$y'=\frac{1}{\frac{3}{2}x-1}\cdot\left(\frac{3}{2}\cdot 1-0\right)=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}x-1}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3x-2}{2}}=\frac{3}{3x-2}$$

9. Derivación logarítmica

Sea $\ln y = g(y)$, siendo $y = f(x) \quad \Rightarrow \quad (\ln y)' = g'(y) \cdot f'(x) = \frac{1}{y} \cdot y' = \frac{y'}{y}$

Téngase en cuenta que $\ln y$ es una función de función (puesto que $\ln y$ es función de y, mientras que y es función de x).

Esta expresión se llama derivada logarítmica de la función $y = f(x)$, que podría escribirse del siguiente modo: $y' = (\ln y)' \cdot y$

Ejemplo

$$y = x^{2x} \quad \Rightarrow \quad y' = \left[\ln\left(x^{2x}\right)\right]' \cdot x^{2x} = (2x \cdot \ln x)' \cdot x^{2x} \quad \Rightarrow \quad y' = \left(2 \cdot 1 \cdot \ln x + 2x \cdot \frac{1}{x}\right) \cdot x^{2x}$$

$$y' = (2\ln x + 2) \cdot x^{2x} = 2x^{2x}(\ln x + 1)$$