

Álgebra de Derivadas (Continuación)

10. Derivada de una potencia de x : es igual al exponente multiplicado por x elevada al exponente menos uno.

$$\text{Sea: } y = f(x) = x^m; m \in \mathbb{N} \Rightarrow y + \Delta y = (x + \Delta x)^m$$

$$\text{Por comodidad escribimos: } x_1 = x + \Delta x \Rightarrow \Delta x = x_1 - x$$

$$\text{Resulta: } y + \Delta y = x_1^m \Rightarrow \Delta y = x_1^m - x^m \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_1^m - x^m}{\Delta x} = \frac{x_1^m - x^m}{x_1 - x}$$

Efectuando el cociente de los polinomios, nos queda:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = x_1^{m-1} + x_1^{m-2} \cdot x + x_1^{m-3} \cdot x^2 + \dots + x_1 \cdot x^{m-2} + x^{m-1}$$

Si $\Delta x \rightarrow 0$, tenemos que $x_1 \rightarrow x$, por lo tanto nos queda una suma de m términos iguales a x^{m-1} , es

$$\text{decir: } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \underbrace{x^{m-1} + x^{m-1} + \dots + x^{m-1}}_{m \text{ sumandos}} = m \cdot x^{m-1} \Rightarrow y' = m \cdot x^{m-1}$$

En caso que el exponente sea negativo, se tendrá:

$$y = x^{-m} \Rightarrow y' = -m \cdot x^{-m-1} \Rightarrow y' = -m \cdot x^{-(m+1)} = \frac{-m}{x^{m+1}}$$

11. Derivada de una potencia cualquiera de una función

$$\text{Sea: } f(u) = y = u^m; \text{ siendo: } u = g(x); m \in \mathbb{R}$$

$$\text{Aplicando logaritmo, tenemos: } \ln y = m \cdot \ln u$$

$$\text{Utilizando derivada logarítmica: } \frac{y'}{y} = m \cdot \frac{u'}{u} \Rightarrow y' = m \cdot \frac{u'}{u} \cdot u^m \Rightarrow y' = m \cdot u^{m-1} \cdot u'$$

12. Derivada de la función exponencial

$$\text{Sea: } y = a^u; \text{ siendo } a = \text{constante y } u \text{ función de } x$$

$$\text{Aplicando logaritmo, tenemos: } \ln y = u \cdot \ln a \Rightarrow \frac{y'}{y} = u' \cdot \ln a \Rightarrow y' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$$

Casos particulares:

$$\text{a) Sea: } y = e^u; u = g(x) \Rightarrow \ln y = u \cdot \ln e \Rightarrow \frac{y'}{y} = u' \cdot \ln e \Rightarrow y' = e^u \cdot u'$$

$$\text{b) Sea: } y = a^x \Rightarrow \ln y = x \cdot \ln a \Rightarrow \frac{y'}{y} = x' \cdot \ln a = \ln a \Rightarrow y' = a^x \cdot \ln a$$

c) Función exponencial natural

$$\text{Sea: } y = e^x \Rightarrow \ln y = x \cdot \ln e \Rightarrow \frac{y'}{y} = x' \cdot \ln e = 1 \Rightarrow y' = y \Rightarrow y' = e^x$$

d) Base y exponente variable: la función donde tanto la base como el exponente son funciones de x , se llama potencial-exponencial o exponencial compuesta.

$$\text{Ejemplos: } y = (\sin x)^{x^2}; y = x^{tg x}; y = x^x; y = (\ln x)^x$$

En general toda función del tipo: $y = u^v$, siendo u y v funciones de x .

$$\ln y = v \cdot \ln u \Rightarrow \frac{y'}{y} = v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \Rightarrow y' = \left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \right) \cdot u^v = u^v \cdot v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \cdot u^v$$

$$\text{Luego: } y' = \underbrace{u^v \cdot v' \cdot \ln u}_{(1)} + \underbrace{v \cdot u' \cdot u^{v-1}}_{(2)}$$

(1): es la derivada de u^v considerando v como función y u como constante (función exponencial).

(2): es la derivada de u^v considerando u como función y v como constante (función potencial).

Aplicaremos la fórmula anterior a la función:

$$y = x^{\ln x} \Rightarrow y' = x^{\ln x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \ln x + \ln x \cdot 1 \cdot x^{(\ln x)-1} = x^{(\ln x)-1} \cdot \ln x + \ln x \cdot x^{(\ln x)-1} = 2 \ln x \cdot x^{(\ln x)-1}$$

13. Derivada de la raíz enésima de una función: $y = \sqrt[n]{u}$; $u = f(x)$

$$y = u^{\frac{1}{n}} \Rightarrow y' = \frac{1}{n} \cdot u^{\frac{1}{n}-1} \cdot u' = \frac{1}{n} \cdot u^{\frac{1-n}{n}} \cdot u' = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{u^{\frac{n-1}{n}}} \cdot u' = \frac{u'}{n \cdot \sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

Casos particulares:

a) Si se trata de una raíz cuadrada: $y = u^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

b) Sea la función: $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

14. Derivadas de funciones inversas

Si $f(x)$ es una función biyectiva, con derivada finita no nula en el punto a , entonces $f^{-1}(x)$ tiene derivada finita en $f(a)$, y esta derivada es: $\frac{1}{f'(a)}$

Demostración

Por definición de función inversa: $\forall x: f^{-1}[f(x)] = x$ (se recuerda que $f^{-1}(x)$ es la manera de indicar la función inversa o recíproca de $f(x)$, el -1 no se refiere a un exponente negativo).

Si derivamos esta expresión, aplicando la derivada de una función de función para derivar el primer miembro, resulta:

$$\text{Téngase en cuenta que: } f(x) \circ g(x) = f[g(x)] \Rightarrow (f(x) \circ g(x))' = f'[g(x)] \cdot g'(x)$$

$$\text{Luego: } (f^{-1})'[f(x)] \cdot f'(x) = 1 \Rightarrow (f^{-1})'[f(x)] = \frac{1}{f'(x)}; \text{ con } f'(x) \neq 0$$

Se podría decir que la derivada de la inversa de $f(x)$, es la inversa de la derivada de $f(x)$.

Ejemplos:

$$1) f(x) = 2x + 1 \Rightarrow (f^{-1})'(2x + 1) = \frac{1}{(2x + 1)'} = \frac{1}{2}$$

$$2) f(x) = e^x \Rightarrow (f^{-1})'(e^x) = \frac{1}{(e^x)'} = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$$

15. Derivada de funciones trigonométricas

15.1. Derivada de la función seno

Sea: $y = \operatorname{sen} x$

Entonces: $y + \Delta y = \operatorname{sen}(x + \Delta x) \Rightarrow \Delta y = \operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x$

Se recuerda que: $\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)$

$$\Delta y = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{x + \Delta x - x}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{x + \Delta x + x}{2} \right) = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \operatorname{sen} \left(\frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x} = \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\Delta x}{2} \right)}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\Delta x}{2} \right)}{\frac{\Delta x}{2}}}_1 \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = \cos x \Rightarrow y' = \cos x$$

Si $y = \operatorname{sen} u$; $u = g(x)$, aplicando derivada de función de función: $y' = \cos u \cdot u'$

15.2. Derivada de la función coseno

Sea: $y = \cos x$

Entonces: $y + \Delta y = \cos(x + \Delta x) \Rightarrow \Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x$

Se recuerda que: $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)$

$$\Delta y = -2 \operatorname{sen} \left(\frac{x + \Delta x - x}{2} \right) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{x + \Delta x + x}{2} \right) = -2 \operatorname{sen} \left(\frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \operatorname{sen} \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2 \operatorname{sen} \left(\frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \operatorname{sen} \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x} = \frac{-\operatorname{sen} \left(\frac{\Delta x}{2} \right)}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \operatorname{sen} \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{-\operatorname{sen} \left(\frac{\Delta x}{2} \right)}{\frac{\Delta x}{2}}}_{-1} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{sen} \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = -\operatorname{sen} x \Rightarrow y' = -\operatorname{sen} x$$

Si $y = \cos u$; $u = g(x)$, aplicando derivada de función de función: $y' = -\operatorname{sen} u \cdot u'$

15.3. Derivada de la función tangente

Sea: $y = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

Derivando como cociente, se obtiene:

$$y' = \frac{(\operatorname{sen} x)' \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cdot \cos x + \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

Si $y = \operatorname{tg} u$; $u = g(x)$, aplicando derivada de función de función: $y' = \frac{u'}{\cos^2 x} = \sec^2 u \cdot u'$

16. Derivadas de funciones circulares inversas

16.1. Derivada de la función arco seno

Sea: $y = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x$; donde: $\operatorname{Dm} = [-1, 1] \wedge \operatorname{Rg} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Su función inversa es: $x = \operatorname{sen} y$ (1)

Aplicando la regla de derivación de funciones inversas, tenemos: $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y}$ (2)

Dado que: $\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y = 1 \Rightarrow \cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}$

Por (1), se puede escribir: $\cos y = \sqrt{1 - x^2}$

Reemplazando en (2): $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$; para $x \in [-1, 1]$

Luego: $y = \operatorname{arc} \operatorname{sen} u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$; siendo $u = g(x)$

16.2. Derivada de la función arco coseno

Sea: $y = \operatorname{arc} \cos x$; donde: $\operatorname{Dm} = [-1, 1] \wedge \operatorname{Rg} = [0, \pi]$

Su función inversa es: $x = \cos y$

Aplicando la regla de derivación de funciones inversas, tenemos: $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{-\operatorname{sen} y} = -\frac{1}{\operatorname{sen} y}$

Dado que: $\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} y = \sqrt{1 - \cos^2 y} \Rightarrow \operatorname{sen} y = \sqrt{1 - x^2}$

Por lo tanto: $y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$; para $x \in [-1, 1]$

Luego: $y = \operatorname{arc} \cos u \Rightarrow y' = -\frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$; siendo $u = g(x)$

16.3. Derivada de la función arco tangente

Sea: $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$; donde: $\operatorname{Dm} = \mathbb{R} \wedge \operatorname{Rg} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Su función inversa es: $x = \operatorname{tg} y$

Aplicando la regla de derivación de funciones inversas, tenemos: $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\sec^2 y}$

$$\text{Dado que: } \sin^2 y + \cos^2 y = 1 \Rightarrow \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} + 1 = \frac{1}{\cos^2 y} \Rightarrow \tan^2 y + 1 = \sec^2 y \Rightarrow 1 + x^2 = \sec^2 y$$

Por lo tanto: $y' = \frac{1}{1+x^2}$; para $x \in \mathfrak{R}$

Luego: $y = \arctan u \Rightarrow y' = \frac{u'}{1+u^2}$; siendo $u = g(x)$

-----*