UNIVERSIDAD TECNÓLOGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL RESISTENCIA
DEPARTAMENTO DE MATERIAS BÁSICA

ANÁLISIS MATEMÁTICO I

APLICACIONES GEOMÉTRICAS DEL CÁLCULO INTEGRAL

TEMAS DE LA CLASE

1. Cálculo de áreas planas
2. Área entre dos curvas
3. Longitud de arco de curva
4. Área de superficie de revolución
5. Volumen de sólido de revolución

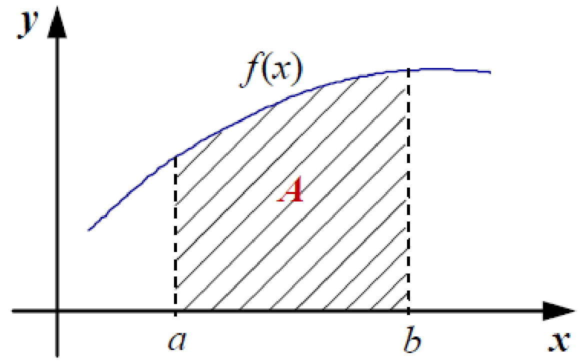
Prof. Humberto Closas – hclosas@hotmail.com

APLICACIONES GEOMÉTRICA DEL CÁLCULO INTEGRAL

1. Cálculo de áreas planas

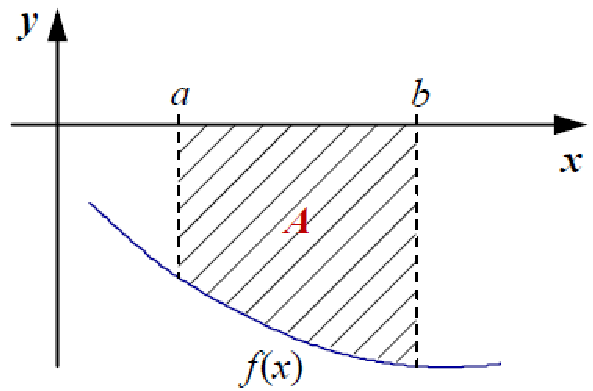
Si $f(x)$ es una función no negativa, continua en el intervalo $[a,b]$, podemos enunciar la siguientes definición de área: $\boxed{A = \int_a^b f(x)dx}$

Si $f(x)$ es una función positiva (como se observa en la figura), la curva se encuentra por encima del eje de abscisas y el área es un número positivo.



En cambio, si $f(x)$ es una función negativa (según se observa en la figura), continua en el intervalo $[a,b]$, para que el área resulte también un número positivo, la definición adecuada es la siguiente:

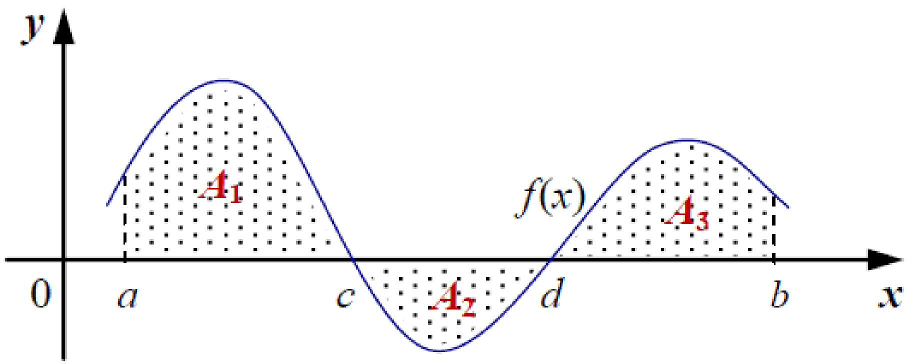
$$\boxed{A = -\int_a^b f(x)dx}$$



En general, si se presenta la situación que se ilustra en el grafico que sigue, donde $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a,b]$, el área se calcula:

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

$$\boxed{A = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx}$$

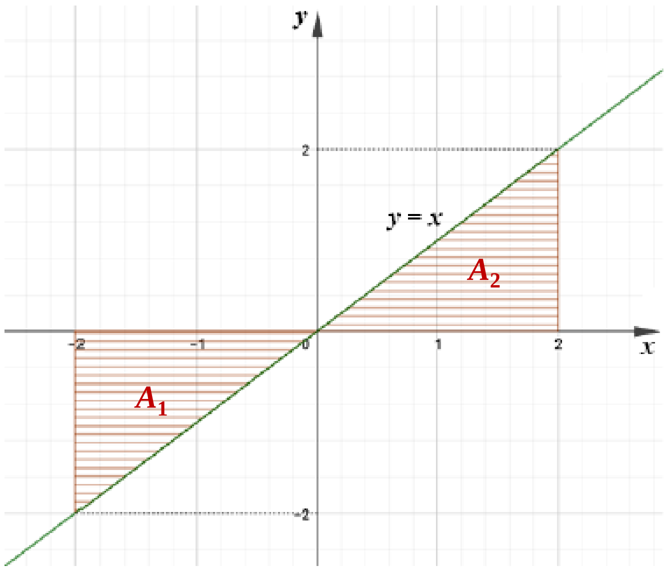


Ejemplo

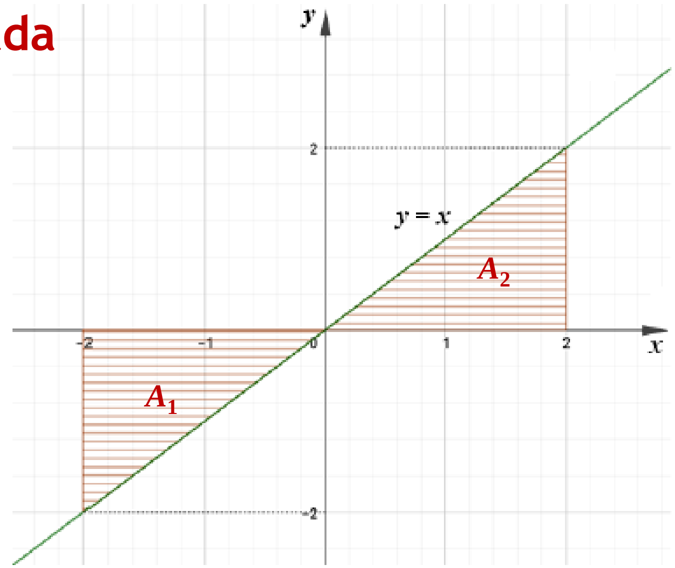
Veamos de qué manera se podría calcular el área comprendida entre la recta $y = x$, el eje de abscisas y las ordenadas correspondientes $x = -2$ y $x = 2$.

Comenzamos por representar gráficamente el área cuyo valor nos piden hallar.

Se observa que el área a calcular corresponde a dos triángulos rectángulos uno de los cuales se encuentra por debajo y el otro por encima del eje x (ambos de base y altura igual a 2, por lo que el área total sería $2\cdot(b\cdot h/2) = 2\cdot(2\cdot 2/2) = 4$ u.a.).



Cálculo del área solicitada



$$A = A_1 + A_2$$

Por lo tanto, de acuerdo con la figura y lo estudiado precedentemente, el cálculo del área solicitada podría plantearse del siguiente modo:

$$A = A_1 + A_2 \quad \Rightarrow \quad A = -\int_{-2}^{0} x\,dx + \int_{0}^{2} x\,dx = -\left|\frac{x^2}{2}\right|_{-2}^{0} + \left|\frac{x^2}{2}\right|_{0}^{2} = -\left(0 - \frac{4}{2}\right) + \left(\frac{4}{2} - 0\right) = 2 + 2 = 4\,\text{u.a.}$$

Es decir, el valor requerido resultó igual a 4 u.a. (unidades de área).

Ahora bien, teniendo en cuenta que, en esta ocasión, los triángulo rectángulos que conforman el área cuyo valor se solicita, son también simétricos respecto del origen del sistema de ejes (las áreas respectivas son iguales), el cálculo podría haberse realizado sencillamente de la siguiente manera:

$$A = 2A_2 \quad \Rightarrow \quad A = 2\int_{0}^{2} x\,dx = 2\left|\frac{x^2}{2}\right|_{0}^{2} = 2\left(\frac{4}{2} - 0\right) = 2 \times 2 = 4\,\text{u.a.}$$

2. Área entre dos curvas

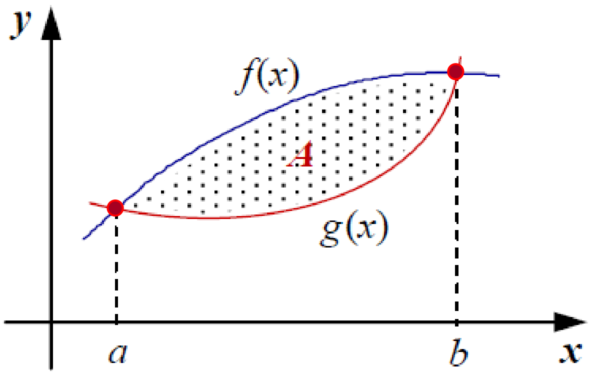
Si se desea hallar el área del recinto comprendido entre los gráficos de dos funciones continuas, se debe efectuar la resta entre las áreas correspondientes.

Previamente es necesario igualar las funciones y resolver la ecuación que se plantea, a efectos de hallar los valores a y b, correspondientes a la intersección entre las curvas.

$$f(x)=g(x) \Rightarrow x_1=a \wedge x_2=b$$

$$A=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$$

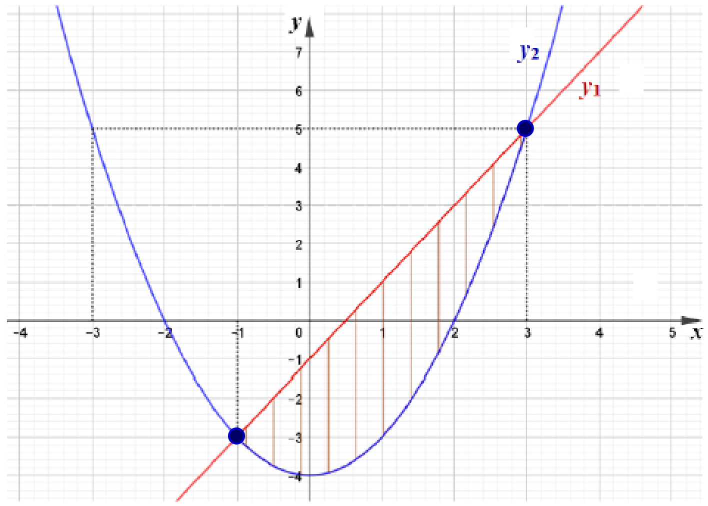
$$\boxed{A=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx}$$



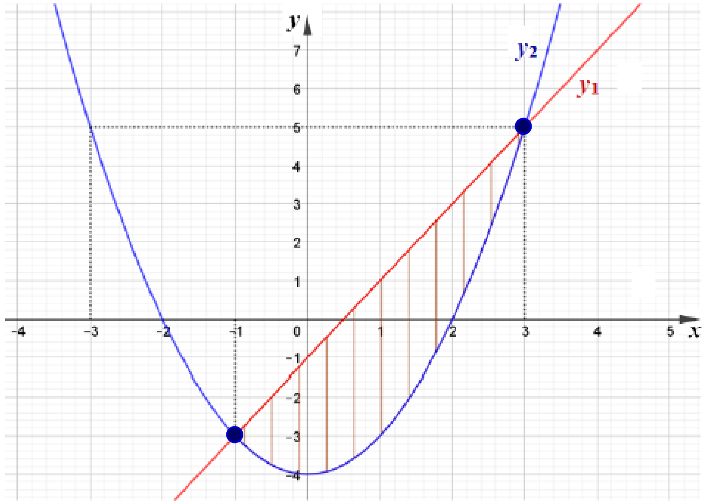
Ejemplo

Se trata de calcular el área encerrada entre las siguientes curvas $y_1=2x-1$ e $y_2=x^2-4$

Se aprecia que los gráficos de ambas funciones tienen una parte por encima del eje x, y otra por debajo. Sin embargo, esa situación no es relevante en este ocasión, de manera que para resolver el área, solo tenemos que hallar la intersección entre la recta y la parábola, para integrar luego entre dichos puntos la diferencia entre ambas funciones.



Ejemplo



Se comienza por igualar las funciones y luego resolver la ecuación que resulta planteada.

En efecto: $y_1 = y_2 \Rightarrow 2x - 1 = x^2 - 4 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1 \wedge x_2 = 3$

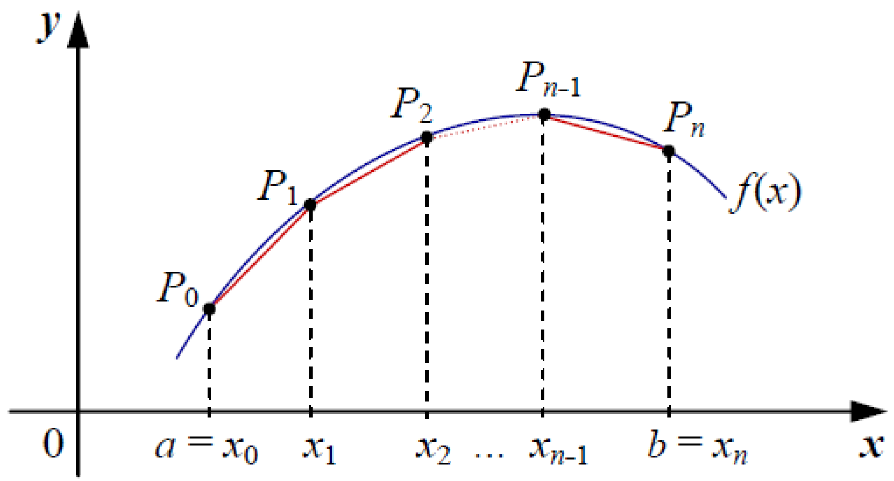
Se calcula la integral: $A = \int_{-1}^{3} (y_1 - y_2)\,dx = \int_{-1}^{3} \left(-x^2 + 2x + 3\right)dx = \left| -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right|_{-1}^{3} = 9 + \frac{5}{3} = \frac{32}{3}$ u.a.

Luego, el valor del área solicitado resultó igual a $\frac{32}{3}$ u.a.

3. Longitud de arco de curva

Si se observa el gráfico de una función continua $f(x)$, se puede hablar intuitivamente de la longitud del arco de curva comprendido entre los puntos P_0 y P_n.

En efecto, considérese una subdivisión del intervalo $[a,b]$ y fórmese la poligonal correspondiente a la misma, uniendo mediante segmentos los puntos $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n$.



Si se suman las longitudes de dichos segmentos se obtiene la longitud de la poligonal inscripta en el arco de curva considerado.

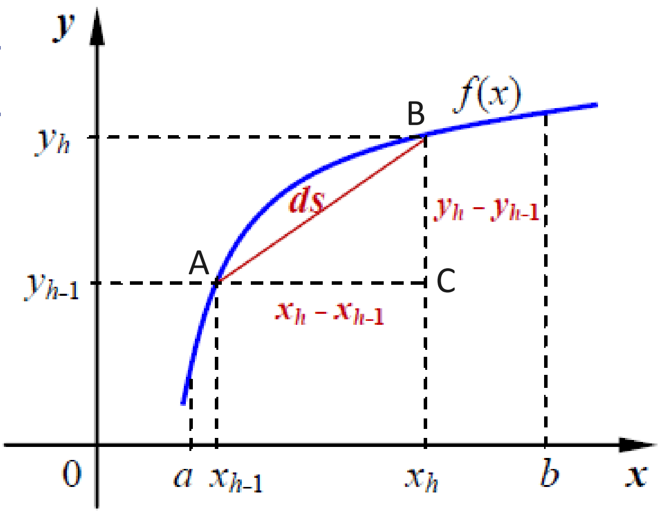
Se define como longitud del arco de curva al supremo $\boxed{S}$ del conjunto formado por las longitudes de las poligonales inscriptas en el mismo.

Luego, si $f(x)$ tiene derivada continua en $[a,b]$, entonces el gráfico de $f(x)$ entre los puntos $[a, f(a)]$ y $[b, f(b)]$ tiene longitud: $\boxed{S = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx}$

Demostración

Se considera una subdivisión cualquiera $P = [x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n]$ del intervalo $[a, b]$.

La longitud de uno de los segmentos que forman la poligonal inscripta se puede hallar utilizando la fórmula del teorema de Pitágoras. Si se llama ds a dicha longitud, resulta:



$$ds = \sqrt{(x_h - x_{h-1})^2 + (y_h - y_{h-1})^2} =$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{y_h - y_{h-1}}{x_h - x_{h-1}}\right)^2}\,(x_h - x_{h-1}) \qquad (1)$$

Aplicando ahora el teorema del valor medio del cálculo diferencial, se tiene: $\Longrightarrow$ $\exists c_h \in (x_{h-1}, x_h) / f'(c_h) = \dfrac{y_h - y_{h-1}}{x_h - x_{h-1}}$

Reemplazando, resulta: $ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,(x_h - x_{h-1})$

La longitud de la poligonal inscripta, correspondiente a la subdivisión P está dada por la suma: $\Longrightarrow$ $\sum_{h=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,(x_h - x_{h-1})$

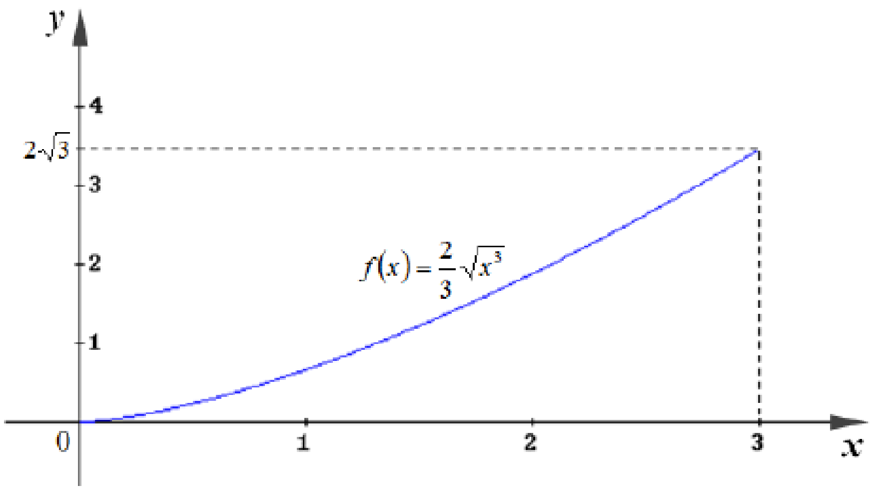
Se sabe que $f'(x)$ es continua y también lo es $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$, por lo tanto es integrable. Luego, se define la longitud del arco de curva buscada como la integral correspondiente, es decir: $\Longrightarrow$

$$\boxed{S = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx}$$

Ejemplo

Se trata de hallar la longitud del arco de parábola $f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$, en el intervalo $[0,3]$.

El gráfico del tramo de la curva, cuya longitud se solicita puede verse en la figura de la derecha.



Comenzamos por calcular: $f'(x)=\sqrt{x}$

Aplicando la fórmula, resulta: $S=\int_0^3\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx=\int_0^3\sqrt{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}\,dx=\int_0^3\sqrt{1+x}\,dx$

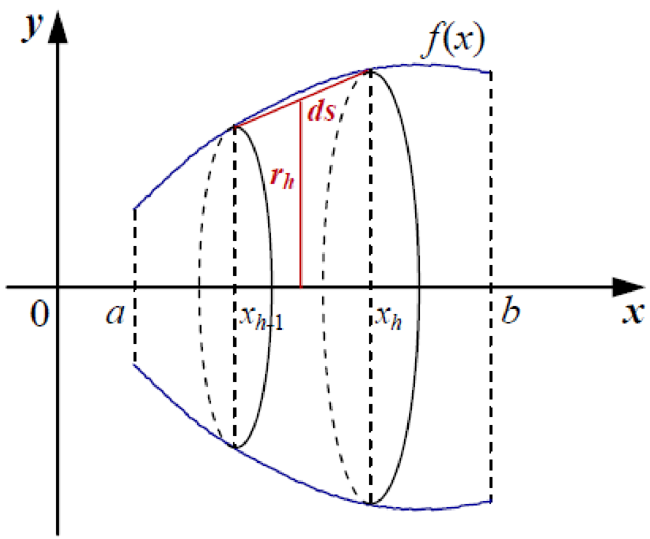
Resolvemos, por sustitución, la integral planteada: $u=1+x \Rightarrow du=dx$

$$\therefore\ S=\int_0^3\sqrt{1+x}\,dx=\int_0^3\sqrt{u}\,du=\left|\frac{2}{3}\sqrt{u^3}\right|_0^3=\left|\frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3}\right|_0^3=\frac{2}{3}\left(\sqrt{64}-1\right)=\frac{14}{3}\text{ u.l. (unidades de longitud)}$$

4. Área de superficie de revolución

Si un arco de curva gira alrededor del eje x, genera una superficie de revolución.
Al considerar una subdivisión cualquiera P del intervalo $[a,b]$, se obtiene, como sabemos, una poligonal inscripta en el arco de curva correspondiente al gráfico de $f(x)$.

Cada uno de los segmentos que constituyen la poligonal engendra, al girar alrededor del eje x, la superficie lateral de un tronco de cono, cuya área está dada por: $2\pi r_h\, ds$, donde r_h es el radio de la circunferencia media y ds es la generatriz del troco de cono.
De manera que, para la poligonal inscripta, el área de la superficie de revolución es la suma de las áreas anteriormente mencionadas: $2\pi \sum_{h=1}^{n} r_h\, ds$

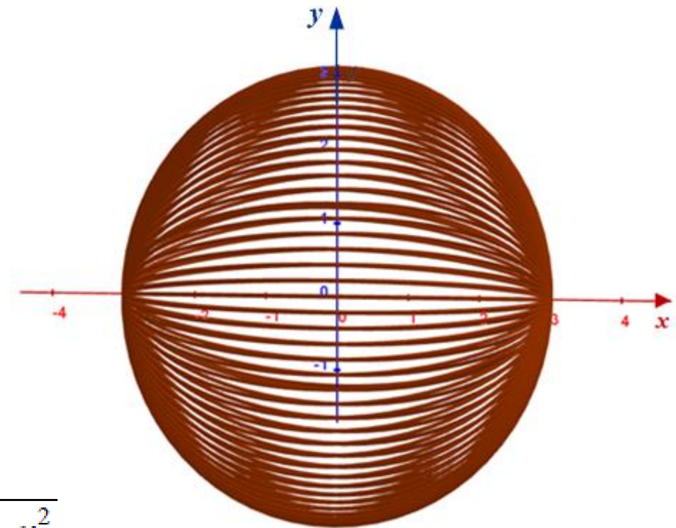


Luego, si $f(x)$ tiene derivada continua en $[a,b]$, se define el área de la superficie de revolución mediante la siguiente integral: $\boxed{A_r = 2\pi \int_a^b f(x)ds = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx \;;\;\; f(x) > 0}$

Área de superficie de revolución

Ejemplo

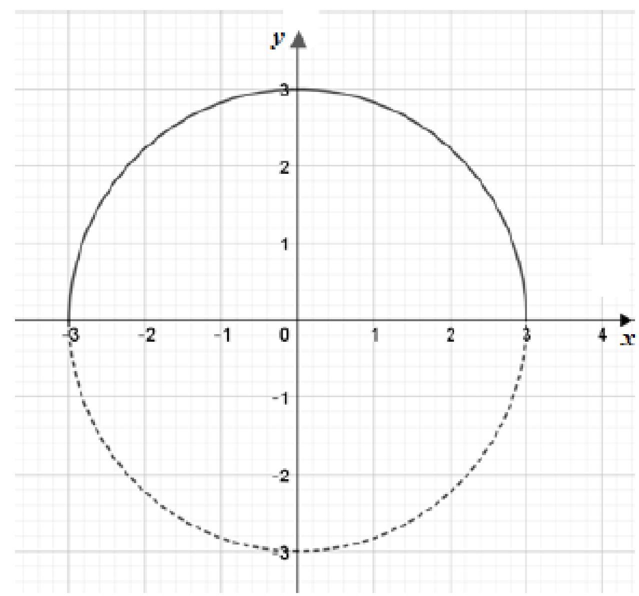
En este caso nos proponemos hallar el área de una superficie esférica de radio igual a 3. El gráfico que ilustra la situación planteada se encuentra a la derecha.



La ecuación de una circunferencia de radio 3 es:

$$x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow y = \pm\sqrt{9 - x^2}$$

Sin embargo, a efectos de que la expresión anterior pueda representar una función consideraremos únicamente el signo positivo de la raíz cuadrada, lo que da lugar a la media circunferencia (gráfico de la derecha) que se encuentra por encima del eje x, la cual al rotar alrededor del mismo describe la superficie esférica que antes pudo ser apreciada.
A su vez, la media circunferencia, por ser simétrica respecto del eje y, podemos integrar solamente en la mitad del intervalo total, es decir [0, 3], y luego multiplicar el resultado por dos, para obtener el área requerida.



Área de superficie de revolución

Ejemplo

Entonces, la fórmula del área de la superficie de revolución que se debe plantear, es:

$$A_r = 2\cdot\left(2\pi\int_0^3 f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx\right) = 2\cdot\left(2\pi\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}\right)^2}\,dx\right) =$$

$$A_r = 2\cdot\left(2\pi\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{9-x^2}}\,dx\right) = 2\cdot\left(2\pi\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\sqrt{\frac{9}{9-x^2}}\,dx\right) = 2\cdot\left(2\pi\int_0^3 3\,dx\right) =$$

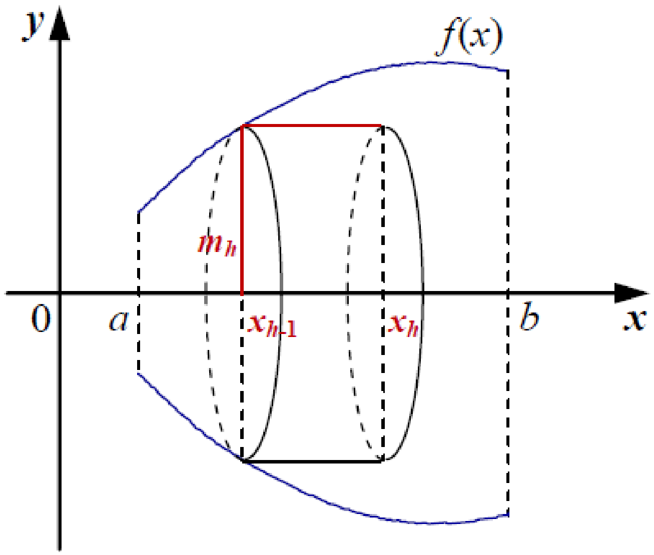
$$A_r = 12\pi\int_0^3 dx = 12\pi\left|x\right|_0^3 = 36\pi \text{ u.a.}$$

Por cierto, al resultado anterior se podría haber llegado teniendo presente que la superficie de una esfera de radio 3, resulta: $4\pi r^2 = 4\pi 3^2 = 36\pi$ u.a.

5. Volumen de sólido de revolución

Utilizando el mismo criterio anterior, podemos definir mediante una integral el volumen del cuerpo engendrado por un recinto de ordenadas al girar alrededor del eje x.
Si se aproxima el recinto mediante rectángulos, al hacer girar dichas figuras alrededor del eje x se obtienen cilindros de revolución.

Elegimos rectángulos inscriptos y se considera, en particular, aquel que tiene como longitud de la base el valor $(x_h - x_{h-1})$ y como longitud de la altura el mínimo de $f(x)$ en el subintervalo $[x_{h-1}, x_h]$.
El volumen del cilindro engendrado por este rectángulo está dado por la fórmula: $\pi (m_h)^2 (x_h - x_{h-1})$.
El volumen correspondiente al polígono inscripto considerado está dado por la suma: $\pi \sum_{h=1}^{n} (m_h)^2 (x_h - x_{h-1})$



Luego, el volumen del sólido de revolución se calcula mediante la integral: $\boxed{V_r = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx}$

Volumen de sólido de revolución

Ejemplo

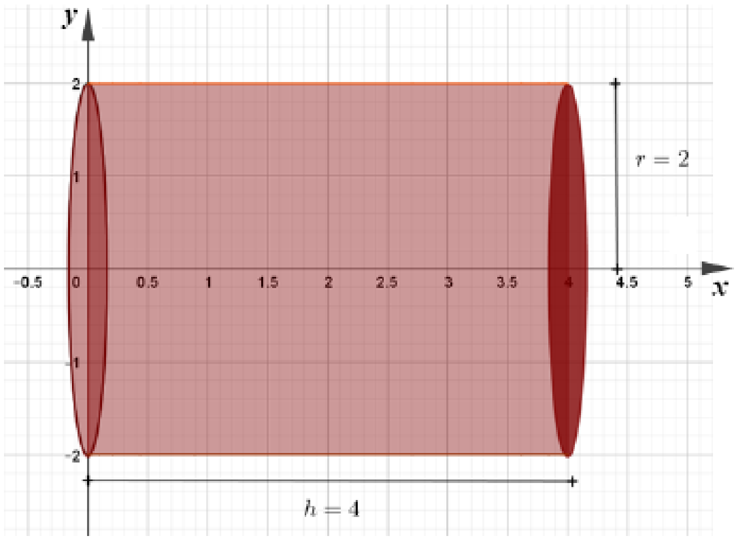
Supongamos que se desea hallar el volumen de un cilindro recto de altura $h = 4$ y radio $r = 2$.

Consideremos que la función es una recta paralela al eje x por $y = 2$, y que gira alrededor de este eje en el intervalo [0, 4], tal como se ilustra en la figura.

Luego, la función a integrar será: $f(x) = 2$

Aplicando la fórmula, resulta:

$$V_r = \pi \int_0^4 2^2\,dx = \pi \left|4x\right|_0^4 = 16\pi \text{ u.v. (unidades de volumen)}$$



Lógicamente, el resultado anterior también podría haberse obtenido utilizando la fórmula del volumen de un cilindro, es decir: $\pi r^2 h = \pi \cdot 2^2 \cdot 4 = 16\pi$ u.v.

¡Muchas gracias!