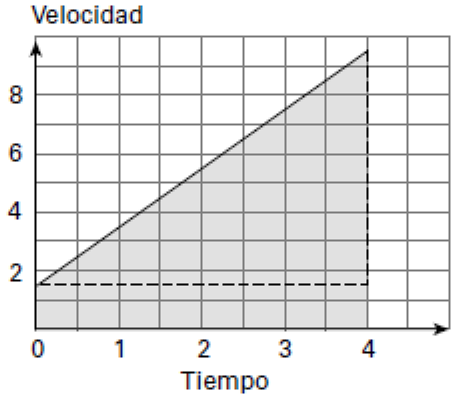
TRABAJO PRÁCTICO Nº 10: INTEGRALES DEFINIDAS – APLICACIONES DEL CÁLCULO INTEGRAL

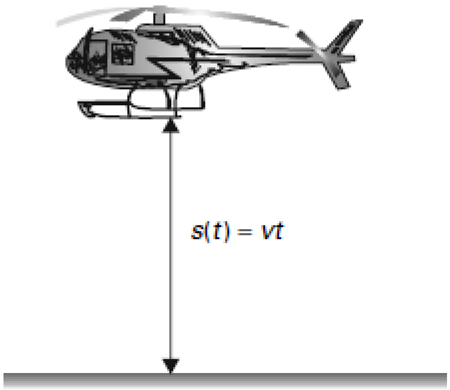
Situación problemática 1: Un helicóptero se eleva de tal manera que su velocidad *v*, en función del tiempo *t*, se modela con la ecuación $v = 2t + 1.5$ pies por segundo.

a) Completar la siguiente tabla de velocidad sustituyendo el valor del tiempo en la ecuación $v = 2t + 1.5$ cada medio segundo durante los primeros 4 segundos.

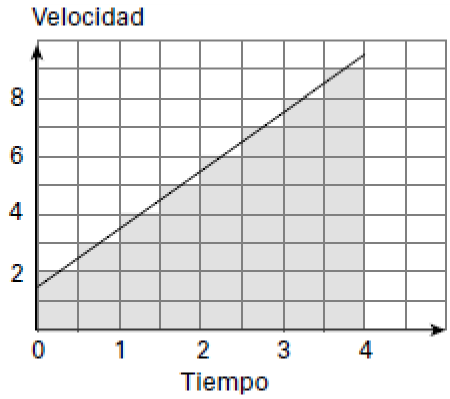
Tiempo (s)	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
Velocidad (pies/s)									

b) Calcular el área gris bajo la gráfica de $v = 2t + 1.5$ y observar que corresponde a la elevación del helicóptero durante los primeros 4 segundos, puesto que para obtener el área mencionada se tiene que multiplicar *velocidad por tiempo* ($s = v.t$).





c) Estimar el área del punto anterior sumando las áreas de los rectángulos de aproximación mostrados en la siguiente gráfica. Para tal fin calcular el valor de las alturas de los rectángulos sustituyendo en la ecuación $v = 2t + 1.5$ el valor de *t* que corresponde al punto medio de la base de éstos. Por ejemplo, la altura del primer rectángulo es 2(0.25)+1.5 = 2.



d) Comentar con sus compañeros las conclusiones del experimento anterior.

Actividad Nº 1: Calcular el área de la región acotada por las gráficas de $y_1 = x^2 + 2$, $y_2 = -x$, $x = 0$, y $x = 1$. Graficar y sombrear el área calculada.

Actividad Nº 2: Calcular el área de la región comprendida entre las gráficas de $f_{(x)} = 2 - x^2$ y $g_{(x)} = x$. Graficar y sombrear el área calculada.

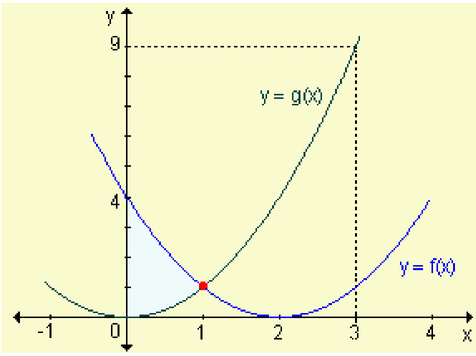
Actividad Nº 3: Calcular el área de la región comprendida entre las gráficas de las funciones: $f_{(x)} = 3x^3 - x^2 - 10x$ y $g_{(x)} = -x^2 + 2x$. Graficar y sombrear el área calculada.

Actividad Nº 4: Calcular el área del triángulo que forman la recta $y_1 = \frac{1}{2}x + 3$, y la gráfica de la función $y_2 = |x|$ Graficar y sombrear el área calculada.

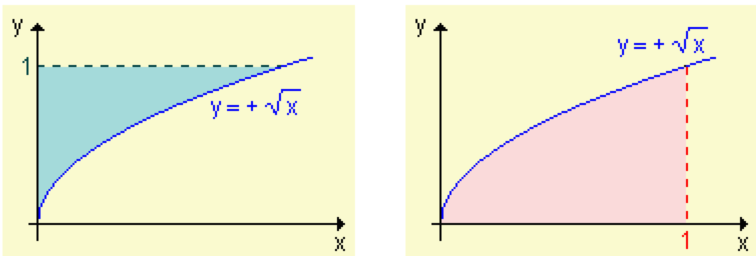
Actividad Nº 5: Calcular el área de la figura limitada por las parábolas: $y^2 = 16 - x$ y $(y + 2)^2 = x + 4$. Graficar las funciones y sombrear la región calculada.

Actividad Nº 6: Calcular el área de la región limitada por las gráficas de $f(x) = sen\, x$ y $g(x) = cos\, x$ entre $x = \pi/4$ y $x = 5\pi/4$.

Actividad Nº 7: ¿Cuál es el área de la región sombreada?, siendo $f_{(x)} = (x - 2)^2$ y $g_{(x)} = x^2$



Actividad Nº 8: Hallar el valor del área sombreada



Situación problemática 2: El comportamiento del consumo de petróleo se ha modificado en los últimos años. El ritmo de consumo (en miles de millones de barriles) de petróleo en EE.UU. entre 1960 y 1979 admite el modelo:

$$f_{(t)} = 0{,}18\, t + 5{,}38 \qquad -10 \leq t \leq 9$$

donde t = 0 corresponde a 1970. De 1979 a 1993, el consumo admite el modelo:

$$g_{(t)} = -\,0{,}0029\, t^3 + 0{,}149\, t^2 - 2{,}42\, t + 18{,}38 \qquad 9 \leq t \leq 23$$

Hallar el ahorro total entre 1979 y 1993 como consecuencia de ese nuevo esquema de consumo. Representar el área que representa el ahorro total utilizando GeoGebra.

LONGITUD DE UN ARCO DE CURVA

Actividad Nº 1: Determinar la longitud de la curva $y = \frac{4\sqrt{2}}{3} x^{3/2}$ para $0 \leq x \leq 1$.

Actividad Nº 2: Determinar la longitud de la curva $y = \left(\frac{1}{3}\right).(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$, de x = 0 a x = 3.
(Sugerencia, tener en cuenta el cuadrado de un binomio)

VOLUMEN DE UN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN

Actividad Nº 1: La región entre la curva $y = \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 4$, y el eje x se hace girar alrededor del eje x para generar un sólido. Determinar su volumen. Graficar

Actividad Nº 2: Determinar el volumen del sólido resultante al hacer girar la región comprendida entre la parábola $x = y^2 + 1$ y la recta $x = 3$ alrededor del eje y (Rotación alrededor de un eje vertical).

Actividad Nº 3: Para generar un sólido se hacen girar la región acotada por la curva $y = x^2 + 1$ y la recta $y = -x + 3$ alrededor del eje x. Determinar el volumen del sólido engendrado *(Sugerencia: tomar arandelas como secciones transversales y rotación alrededor del eje x)*

INTEGRALES PROPIAS E IMPROPIAS

Actividad: En cada uno de los ejercicios estudiar la convergencia o divergencia de la integral

a) $\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx$ b) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ c) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^3}$

d) $\int_1^{\infty} \frac{x\,dx}{(1+x^2)^4}$ *e)* $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{4+x^2}$ *f)* $\int_2^{6} \frac{dx}{\sqrt{6-x}}$

AUTO EVALUACIÓN:

Situación problemática: Dadas las funciones $f(x) = \frac{1}{x-3} + 2$ y $g(x) = -x - 1$

a) Determinar analíticamente los puntos de intersección entre ambas funciones.
b) Graficar ambas funciones en el mismo sistema de ejes.
c) Determinar analíticamente el área comprendida entre las funciones.
d) Calcular el área entre la función homográfica, la asíntota horizontal, x = 4 y x = 5.
e) Sombrear las áreas calculadas.

ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

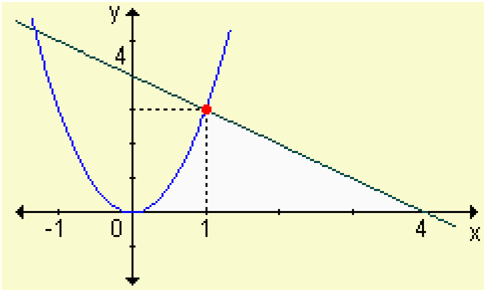
Actividad Nº 1: Calcular el área de la región acotada por las gráficas de $x = 3 - y^2$ y $x = y + 1$. Graficar y sombrear el área calculada.

Actividad Nº 2: Calcular el área de la región comprendida entre el eje x, la semiparábola y la recta dada:

a) $y_1 = \frac{1}{2}\sqrt{x}$; $y_2 = \frac{15}{16} - x$

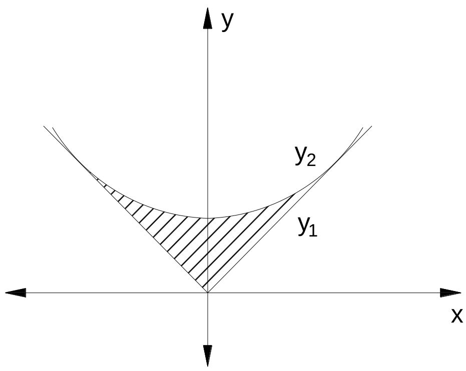
b) $y_1 = -\sqrt{3x}$; $y_2 = \frac{7}{12} - x$

Actividad Nº 3: Indicar el área correcta del recinto sombreado, justificar la respuesta:



$$a)\frac{4}{3} b)\frac{11}{2} c)\frac{32}{3}$$

Actividad Nº 4: La superficie de una pieza de una máquina es la región entre las gráficas de $y_1 = |x| e y_2 = 0{,}08x^2 + 3{,}125$. Calcular el área superficial de la pieza.



Actividad Nº 5: Calcular y graficar el área limitada por:

a) $f(x) = -x^2 - 9$ y el eje x, entre los puntos x = -2 y x = 2

b) $y^2 = x + 1$ y la recta x = 8

c) $y = x^3 - x$ y la recta tangente a la curva en x = -1

d) $f(x) = 2 - x^2$; $g(x) = -x$

e) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$; $g(x) = 2x^2 + 4x$

f) $y_1 = -x + 5$ y $y_2 = \frac{4}{x}$

g) $y = -2x + 3$; $y = \frac{7}{2}x - \frac{27}{2}$; $y = \frac{1}{5}x + 3$

h) $y = -\frac{1}{3}x^3 + 9x$, y la recta tangente a la curva en x = 1

i) f(x)= sen x y las rectas x=0 y x=π/2

j) f(x) = $\frac{1}{x^2} - x$ y el eje de las abscisas, entre las rectas x = 2 y x = 3

k) $y + x^2 + 4 = 0$ y la recta y = -8

l) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 9x$; $g(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$

m) $f(x) = x^2$; $x^2 = 18 - y$

n) f(x) = $\sqrt{x}$; $g(x) = x^3$

Actividad Nº 6:
a) Calcular el área encerrada por el eje x, la función: $y = x^2 - 2x - 3$ y la recta y – 5 = 0
b) Graficar sombreando el área calculada
c) Hallar la recta tangente a la parábola en x = 2
d) Incorporar al gráfico anterior la recta tangente hallada
e) Calcular detalladamente el área **finita** entre la parábola y la recta tangente

Actividad Nº 7: Dada la función: $f(x) = -x^3 + 4x$
a) Calcular el área determinada por *f(x)*, el eje x, x = -3 y x = 2
b) Determinar la ecuación de la recta tangente a *f(x)* en x = -1
c) Determinar analíticamente los puntos de intersección entre ambas funciones.
d) Graficar las funciones en el mismo sistema de ejes cartesianos y sombrear el área delimitada por ellas.
e) Calcular el área entre la función y la recta tangente.

LONGITUD DE ARCO DE CURVA

a) Determinar la longitud del segmento de la recta x + 3 y = 4 del punto (-2;2) al punto (4;0)
b) Hallar la longitud del arco de la curva f(x)= $\frac{2}{3}(x-5)^{\frac{3}{2}}$ desde la abscisa x = 6 a x = 8.
c) Calcular la longitud del segmento de la recta dada por la siguiente función: $f_{(x)} = 3x$ desde (1;3) hasta (2;6)

VOLUMEN DE UN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN

a) Calcular el volumen engendrado por la región limitada por las curvas: **f(x) = x²** y **g(x) = -x² + 3x**
b) Calcular el volumen del sólido de revolución engendrado por la función $f(x) = +\sqrt{x}$ entre 0 y 4 al girar sobre el eje x.
c) Calcular el volumen del sólido de revolución engendrado por el gráfico de la función $y = \frac{1}{x}$ entre x = 1 y x = 3, al girar sobre el eje x.

d) Determinar el volumen del sólido resultante al hacer girar la región comprendida ente el eje y la curva$x = \frac{2}{y}, 1 \leq y \leq 4$, alrededor del eje y. Graficar

INTEGRALES PROPIAS E IMPROPIAS

En cada uno de los ejercicios estudiar la convergencia o divergencia de la integral.

a) $\int_{-2}^{2} \frac{x^2 dx}{(1+x^3)^4}$ b) $\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(6-x)^8}}$

c) $\int_{0}^{1} x \ln x \, dx$ d) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$ e) $\int_{0}^{+2} \frac{2dx}{\sqrt{4-x^2}}$