U.T.N.
F.R.RE.

GUÍA DE TRABAJOS PRÁCTICOS
2025

ANÁLISIS MATEMÁTICO I

*TRABAJO PRÁCTICO Nº 1: C*ONJUNTO DE NÚMEROS REALES

Pre clase - Situación problemática 1:

El cuádruplo del número de objetos disminuido en 5, no excede 35 y el quíntuplo de dicho número de objetos, aumentado en 2, no es menor que 50. ¿Cuántos objetos hay?

Situación problemática 2:

El nivel de alcohol en sangre de una persona que ha bebido hace 30 minutos un vaso de cerveza es $N = \frac{40}{x}$, siendo x su peso en kg. La ley Nacional de Tránsito establece multas para quienes conduzcan con un nivel superior a 0,50 gramos por litro de sangre. ¿Qué personas podrían conducir a los 30 minutos de haber tomado un vaso de cerveza?

Actividad 1: Dadas las inecuaciones:

a) $\frac{6(x-2)}{5} > \frac{10(2-x)}{3}$

b) $x^2 - 1 \leq 3$

c) $e)\ x^2 < 4x + 12$

d) $\frac{-6}{3+4x} \geq 2$

e) $\frac{x+2}{x-4} \leq 1$

i) Hallar los valores que las verifican.

ii) Graficar el conjunto solución.

iii) Hallar, si existen, cotas, supremo, ínfimo, elemento máximo y elemento mínimo.

AUTO EVALUACIÓN:

1) La desigualdad $x^2 + 1 < -5$ no tiene solución. Explique por qué.

2)Explique las diferencias entre los siguientes tres problemas. ¿Hay alguna similitud en sus soluciones?

a) Escriba la expresión como un solo cociente: $\frac{x}{x-2} + \frac{x}{x^2-4}$

b) Escriba la expresión como un solo cociente: $\frac{x}{x-2} + \frac{x}{x^2-4} = 0$

c) Escriba la expresión como un solo cociente: $\frac{x}{x-2} + \frac{x}{x^2-4} < 0$

Actividad 2: Resolver las siguientes ecuaciones con valor absoluto y verificar el resultado:

$a)|2x - 5| = 7$ $b)|3x + 8| - 4 = 10$

Situación problemática 3: Ciertos tipos de vidrio deben tener un grosor de 0,089 pulgadas. Pero debido a las limitaciones del proceso de fabricación, se permite que el grosor varíe respecto a dicho valor hasta en 0,004 pulgadas. Si “t” representa el grosor permitido, esto se representa mediante: $| t- 0,089 | \leq 0,004$. ¿Cuáles son los valores máximos y mínimos aceptables para el espesor del vidrio?

Situación problemática 4: En Estados Unidos el voltaje casero normal es de 115 voltios. Sin embargo, no es raro que el voltaje real difiera del normal en 5 voltios, como máximo. Exprese esta situación como desigualdad que involucre valor absoluto. Utilice x como voltaje real y resuelva para determinar la variación de x.

Actividad 3: Dadas las inecuaciones:

$a)$ $|2x+5| \geq 7$ $b)$ $|1\text{-}2x| < 3$ $c)$ $3 < |x-5| \leq 7$

$d)$ $0 < \left|\frac{x-3}{2}\right| < 2$ $e)$ $\left|\frac{x+2}{x-1}\right| > 1$

i. Hallar los valores de x para los cuales se verifica cada expresión.
ii. Graficar la solución.
iii. Analizar si se puede expresar como entorno. De ser así calcular la amplitud e indicar el centro y el radio.
iv. Expresar el entorno analíticamente.

AUTO EVALUACIÓN: Resolver a) $\left|x-\sqrt[5]{-32}\right| \geq \left|-3+\frac{x}{2}\right| . 4^{-1}$

b) $|x-1| < |x+1|$

TRABAJO PRÁCTICO Nº 2: FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL O FUNCIONES ESCALARES

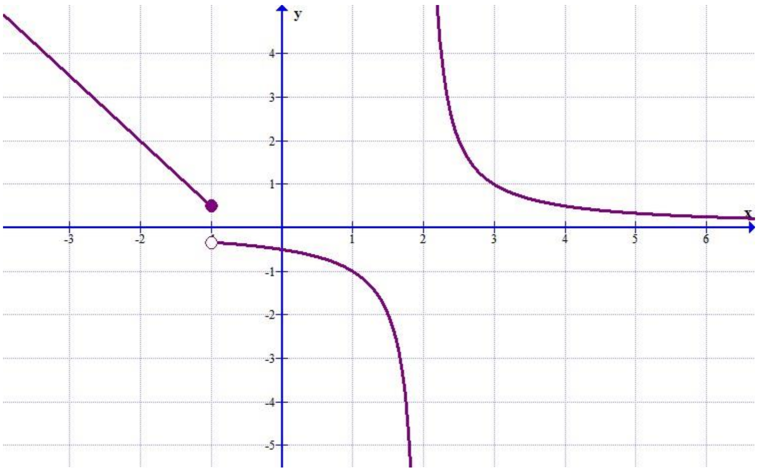
Pre clase - Situación problemática 1: La base de un rectángulo es el doble de la altura.

a) Expresar el perímetro en función de la base.

b) Expresar el área en función de la altura.

c) Determinar el valor del perímetro y del área si la altura es de 10 cm.

Actividad Nº 1: Dada la siguiente función $y = f(x)$



a) Determinar el valor aproximado de $f(4), f(-2), f(-1), f(0), f(f(3))$

b) ¿En qué punto(s) f no está definida?

c) Determinar el Dominio de *f*.

d) Indicar el valor de la(s) preimagen(es) de -0,1.

e) Determinar el recorrido o imagen de *f*.

f) Determinar el valor x_a , tal que:

$f(x_a) = 0, \quad f(x_a) = -2\,, \quad f(x_a) = 1/2, \quad f(x_a) = 2$

g) ¿Cuál es el conjunto solución de la inecuación f(x) $\leq 0{,}5$?

h) ¿Cómo se comporta f(x) cuando se consideran valores de x suficientemente grandes?

i) ¿Cuáles son los ceros de la función?

j) Indicar los intervalos de positividad y negatividad.

Situación problemática 2: En un laboratorio se realizan pruebas a una determinada sustancia, haciendo que la temperatura (T, en °C) varíe en función del tiempo (t, en horas) de acuerdo a la siguiente función:

$T(t) = \sqrt{2-t} - \sqrt{4t-1}$

a) ¿Para qué intervalo de tiempo es válida la función T(t)?

b) ¿Cuál es la temperatura de la sustancia al inicio de la prueba? ¿Cuál es la temperatura de la sustancia al finalizar la prueba?

c) ¿Cuánto tiempo después de iniciar el proceso la sustancia alcanza 0°?

d) ¿Durante el proceso la sustancia se enfría o se calienta?

Actividad Nº 2: Dadas las funciones**:**

$a) f(x) = \frac{1}{x^4-1}$ $\qquad$ $b) y = ln\left(\frac{2x}{x+2}\right)$

$d) f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x^2-9}}$ $\qquad$ $e) f(x) = \sqrt{ln\left(\frac{x+1}{x^2-1}\right)}$ $\qquad$ $f) f(x) = \frac{x+1}{x}.ln(x+1)$

g) $y = \ln\left(\frac{2}{1-x}\right) - \sqrt{\frac{-2}{x-1}}$ $\qquad$ h) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\ln(2+x)}$ $\qquad$ i) $y = \frac{-2}{4-x^2} + ln(2x-1)$

i) Representar gráficamente cada función en GeoGebra, reconociendo el dominio en cada caso.

ii) Hallar analíticamente el dominio de dichas funciones para comprobar los resultados obtenidos en i).

AUTO EVALUACIÓN: Hallar el Dominio de la función:

$y = (-\sqrt{2-1:(3-x)^{-0,5}} + 1)^{0,5}$

Actividad Nº 3: Dadas las funciones

i) $f(x) = x + 6;$ $\qquad$ $g(x) = \log_3|x-1|$

ii) $f(x) = \sqrt{x+5}$; $\qquad$ $g(x) = x^3 - 5$

a) Determinar: $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$

b) Analizar y comparar el Dominio de cada una de las funciones compuestas.

Actividad Nº 4: Verificar si las funciones f y g son inversas una de la otra, demostrando que $f(g(x)) = x$ y $g(f(x)) = x$. En caso de serlo, verificar gráficamente.

a) $f(x) = 3x + 4$; $g(x) = \frac{1}{3}(x-4)$

b) $f(x) = (x-2)^2 \ si \ x \geq 2$; $g(x) = \sqrt{x} + 2 \ si \ x \geq 0$

c) $f(x) = x^8 - 8$; $g(x) = \sqrt[3]{x+8}$

d) $f(x) = log_{\frac{1}{2}}x$; $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Situación problemática 3: Durante un proceso, la temperatura de una sustancia (T, en °C) en función del tiempo (t, en minutos) viene dada por:

$$T(t) = \begin{cases} 20 + 15\text{t} & \text{si } t \leq 4 \\ -\frac{15}{2}t + 110 & \text{si } 4 < t \leq 12 \\ 20 & \text{si } 12 < t \leq 30 \end{cases}$$

a) ¿En qué intervalos de tiempo la temperatura aumenta, en qué intervalos disminuye y cuándo se mantiene constante?

b) ¿En algún momento la sustancia se encuentra a 0°C?

c) ¿Cuál es la temperatura 10 minutos después de iniciado el proceso?

d) ¿Cuánto tiempo después de iniciado el proceso la temperatura alcanza su máximo valor?

e) ¿Cuánto tiempo dura todo el proceso?

Actividad Nº 5: Graficar las siguientes funciones. Indicar dominio e imagen. Analizar su paridad.

$a) y = \sqrt{3x^2 - 4x + 1}$

$b)\ y = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x \leq 2 \\ |x-5| & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$c)\ y = \begin{cases} -2x^2 & \text{si } x \leq -1 \\ -5 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 4x-3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

$d)\ y = \begin{cases} Sen(2x) & \text{si } x \leq \frac{\pi}{2} \\ 2Cos\,(x) & \text{si } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$e)\ f(x) = \begin{cases} |x+3| & si\ x \leq -3 \\ \frac{x+1}{x-2} & si - 3 < x \leq 3 \\ \log(2 + x^2) & si\ \ x > 3 \end{cases}$

$f)\ f(x) = \begin{cases} |x+2| & si\ x \leq 0 \\ -0{,}5x + 2 & si\ 0 < x \leq 4 \\ \sqrt{x-4} & si\ x > 4 \end{cases}$

Actividad N° 6: (SOLO PARA IEM – IQ)

Estudio de las características de la función sinusoidal como modelo matemático.

a) Indicar los valores de las constantes A= amplitud, B= pulso, C= constante de fase y decir qué indica cada una de ellas respecto del gráfico.

b) Calcular:

i- ordenada al origen.

ii- Valores de *x* que anulan la función.

iii- Intervalos donde la función es positiva.

iv- Intervalos donde la función es negativa.

c) Representarla gráficamente.

1) $y = sen\, x$ 2) $y = 2\, sen(2x - \pi)$ 3) $y = -\, sen\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

AUTO EVALUACIÓN: Dadas las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x + 3} & \text{si } x < -3 \\ -4 + x^2 & \text{si } |x| < 3 \end{cases} \quad ; \quad g(x) = -x^2 + 4x \text{ si } x \geq 3$$

a) Graficar ambas en un mismo sistema de ejes coordenados. Detallar las tablas de valores correspondientes.

b) Escribir el conjunto Dominio e Imagen de cada una de ellas.

c) ¿Para qué valores de x será $0 < f(x) < 5$? Justificar analíticamente la respuesta.

TRABAJO PRÁCTICO Nº 3: SUCESIONES NUMÉRICAS

Pre clase: Determinar cotas superiores e inferiores, supremo e ínfimo, máximo y mínimo, si existen, de las siguientes sucesiones:

$F = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6} \dots\right\}$ $G = \left\{x \in R / x = \frac{(-1)^n}{n}, n \in N\right\}$

$$H = \left\{x \in R / x = \frac{2n + 1}{n + 1}, n \in N\right\}$$

Actividad N° 1: Halla la fórmula para el término n-ésimo que describe a cada sucesión. A medida que *n* se incrementa ¿los términos parecen acercarse a algún valor finito? Explique su razonamiento.

$a) 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ $b) 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \ldots$

$c) \frac{10}{2}, \frac{10}{5}, \frac{10}{10}, \frac{10}{17}, \frac{10}{26} \ldots$ $d) \frac{1}{4}, \frac{4}{9}, \frac{9}{16}, \frac{16}{25}, \frac{25}{36}, \ldots$

Actividad N° 2: Dadas las siguientes sucesiones:

a) $(a_n) = \left(\frac{1}{3^n}\right)$ b) $(a_n) = \left(\frac{n^2-1}{n+1}\right)$

c) $(b_n) = \left(\frac{3n^4+8}{\sqrt[3]{16n^6-5n}}\right)$ d) $(g_n) = \left((-1)^n \frac{n}{n+2}\right)$

e) $(b_n) = \left(1 - \frac{7}{3n}\right)^{2n}$ f) $(a_n) = \left((1)^n . \left(\frac{\sqrt{4n^4-n+6}}{n^2-3n+10}\right)\right)$

i) Escribir los cuatro primeros términos.

ii) Indicar cotas, extremos y elementos.

iii) Analizar si son convergentes, divergentes, oscilantes, monótonas crecientes, decrecientes o no monótonas.

TRABAJO PRÁCTICO Nº 4: LÍMITES

Pre clase: Completar las tablas de valores y el valor del límite en cada caso.

x	$y = x^2 - 2x + 1$
-2,9	
-2,99	
-2,9999	
-3,0001	
-3,01	
-3,1	

$\lim_{x \to 2} x^2 - 2x + 1 =$

x	$y = \frac{1}{-x-1}$
-0,9	
-0,99	
-0,9999	
-1,0001	
-1,01	
-1,1	

$\lim_{x \to -1} \frac{1}{-x-1} =$

x	$y = \frac{-x^2+x}{x-1}$
0,9	
0,99	
0,9999	
1,0001	
1,01	
1,2	

$\lim_{x \to 1} \frac{-x^2+x}{x-1} =$

Actividad Nº 1: Aplicando la definición de límite demostrar: $\lim_{x\to 3}(4x+3) = 15$

Actividad Nº 2: Dada la siguiente función hallar: $f(x) = \frac{x-2}{3x^2-12}$ *en a = 2*

a) Gráfica.

b) Límite para $x \to a$.

c) Verdadero valor de la función en $x = a$

Actividad Nº 3: Resolver los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 1} 3x^2 - 2x + 3 =$	i) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+9}}{x+9} =$
b) $\lim_{x\to 1} \frac{2x^3+4x^2-2x-4}{x^2+2x-3} =$	j) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x(x+a)} - x =$
c) $\lim_{x\to -3} \frac{x^2-9}{2x^2+2x-12} =$	k) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x}{x^2-3x+2} - \frac{3}{x-2}\right) =$
d) $\lim_{m\to 1} \frac{m^2-\sqrt{m}}{m-1} =$	l) $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^{x-1} =$
e) $\lim_{x\to 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}} =$	m) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{2x+2} =$
f) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^5-3x^2}{x^2-3x-2} =$	n) $\lim_{x\to 0} (1+sen\,x)^{1/x} =$
g) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{15x^2+6x} =$	ñ) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 sen\,3x}{tg^3 2x} =$
h) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4-1}{15x^7+6x} =$	o) $\lim_{x\to 0} \frac{sen^4\left(\frac{1}{2}x\right) tg\,4x}{sen\,8x\; tg^4\left(\sqrt{2}x\right)} =$

Actividad Nº 4: Graficar la función: $f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x < -1 \\ x^2 & si \ -1 \le x < 1 \\ x-1 & si \quad x \ge 1 \end{cases}$

Resolver los siguientes límites para esa función:

a) $\lim_{x\to 0} f(x) =$ b) $\lim_{x\to -1^-} f(x) =$ c) $\lim_{x\to -1^+} f(x) =$

d) $\lim_{x\to -1} f(x) =$ e) $\lim_{x\to 1^-} f(x) =$ f) $\lim_{x\to 1^+} f(x) =$ g) $\lim_{x\to 1} f(x) =$

Situación problemática 1: El crecimiento de una población animal está dado por la siguiente ecuación: $f(x) = \frac{10}{5+6e^{-2x}}$

a) ¿Cuál es la población inicial, en miles, de los animales?
b) ¿Se estabilizará la población animal con el paso del tiempo?

Situación problemática 2: En cierta empresa la curva de producción está dada por la siguiente fórmula: $f\ (t) = 100 - 60.e^{-0,2t}$

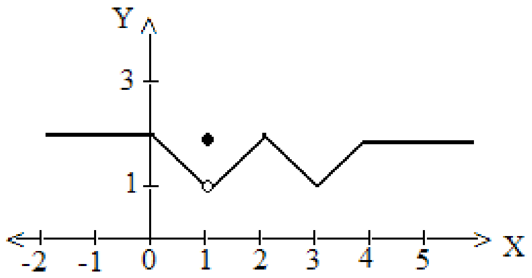
a) Determinar el número de unidades producidas al momento en que un operario ingresa a trabajar.
b) Determinar el número de unidades producidas después de 12 hs. de aprendizaje.

Actividad Nº 5: Determinar las asíntotas de las siguientes funciones, por definición. Graficar:

a) $f(x)= \frac{x^2+1}{x-1}$ b) $f(x)= \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

TRABAJO PRÁCTICO Nº 5: FUNCIONES CONTINUAS

Pre clase: A partir del siguiente gráfico de $y = f(x)$,



a) ¿En qué valor de "x" no existe límite $\in R$?
b) ¿En qué valor de "a" existe $\lim_{x \to a} f(x)$ pero f(x) no es continua?

Actividad Nº 1: Dadas las siguientes funciones: i) Graficarlas. ii) Analizar la continuidad en los puntos indicados. iii) Si la función es discontinua, determinar si la misma es evitable o esencial. iv) Si es evitable, redefinir la función.

a) $f(x)=\begin{cases} x^2+x+2 & \text{si } x>0 \\ 9 & \text{si } x=0 \\ 2x+2 & \text{si } x<0 \end{cases}$ en $x_0 = 0$

$b)$ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+3}{x^2+x-6} & \text{si } x \neq -3 \wedge x \neq 2 \\ 2 & \text{si } x=-3 \\ 1 & \text{si } x=2 \end{cases}$ $en\ x_0 = -3 \ \ y\ x_1 = 2$

$c)\ f(x) = \begin{cases} x+2 & si \quad x<-1 \\ 3^x & si \quad -1 \le x \le 1 \\ -x^2+4x & si \quad x>1 \end{cases}$ $en \quad x_0 = -1 \quad y \quad x_1 = 1$

Actividad Nº 2: Hallar si existe el valor de k para que la función $f(x)$ sea continua en todo su dominio.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{x^2-4} & si \quad x<-2 \\ k & si \quad x=-2 \\ -x^2+4x & si \quad x>-2 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{sen\,(x-1)}{x^2-1} & si \quad x<1 \\ k & si \quad x=1 \\ \dfrac{\sqrt{2x-1}-1}{2x-2} & si \quad x>1 \end{cases}$

<u>AUTO EVALUACIÓN</u>: Dadas las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} |x-1|+2 & si\ \ x \ \le 2 \\ -x^2+6x-8 & si\ \ x \ >2 \end{cases}$$

Graficar la función. Analizar si la función es continua en x = 2 y en x = 1. En caso de discontinuidad, clasificarla.

TRABAJO PRÁCTICO Nº 6: DERIVADA Y DIFERENCIAL

Pre clase: La tabla exhibe la posición de un ciclista.

t (segundos)	0	1	2	3	4	5
s (metros)	0	1.4	5.1	10.7	17.7	25.8

a) Hallar la velocidad promedio para cada periodo:

i) [3;5] ii) [3; 4]

b) Usar la gráfica de s como una función de t para estimar la velocidad instantánea cuando t = 3.

Actividad Nº1: Si se lanza una roca hacia arriba en el planeta Marte con una velocidad de 10 m/s, su altura en metros t segundos después, se obtiene mediante la función:

$$h = 10t - 1.86\,t^2.$$

a) Hallar la velocidad promedio en los intervalos de tiempo que se proporcionan:

i) [1; 2] ii) [1; 1.5] iii) [1; 1.1] iv) [1; 1.01] v) [1; 1.001]

b) Estimar la velocidad instantánea cuando t = 1.

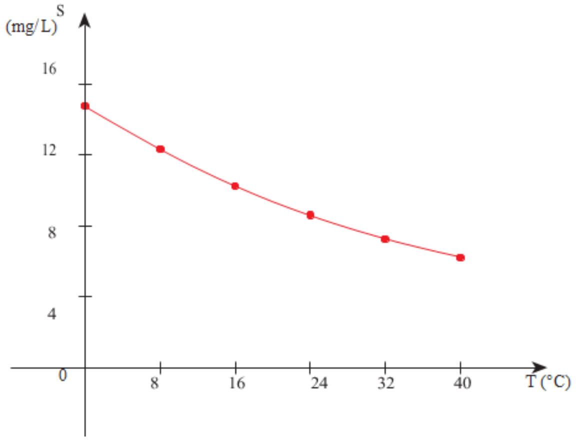
c) Calcular la velocidad instantánea aplicando límite del cociente de incrementos.

d) Interpretar la situación en un graficador.

Actividad Nº 2: La cantidad de oxígeno que se puede disolver en agua depende de la temperatura del agua. (De esa manera la polución térmica induce el contenido de oxígeno en el agua). La gráfica muestra cómo varía la solubilidad S de oxígeno como una función de la temperatura del agua T.

a) ¿Cuál es el significado de la derivada S'(T)? ¿Cuáles son sus unidades?

b) Estimar e interpretar el valor de S'(16).



Actividad Nº 3: La Aplicando reglas de derivación, hallar las derivadas de las siguientes funciones y expresar los resultados reducidos a su mínima expresión:

$a)\ f(x) = \frac{x^6}{5} - \frac{3x^2}{2} + \frac{1}{5}$

$b)\ y = \frac{-3x^2}{2} - \frac{5}{x} + 2$

$c)\ y = \frac{x}{x^2-1}$

$d)\ y = \frac{ln(x^2-1)}{x-1}$

$e)\ f(t) = 4sen^2(-2t^2+5) - 2\,cos(5+t)^3$

$f)\ y = \frac{1}{(t^4+1)^3}$

De las siguientes funciones, obtener hasta sus derivadas de orden III:

$g)\ f(x) = e^{-kx}\ , k\ constante$

$h)\ f(t) = \sqrt{\frac{t^2-4}{t}}$

$i)\ f(x) = 2^{Sen\,\pi x}$

Actividad Nº 4: Hallar la derivada de las funciones aplicando derivación logarítmica:

$a)\ y = (tg\,x)^{(1/x)}$

$b)\ \ y = \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$

$c)\ y = (ln\,x)^{Cos\,x}$

Actividad Nº 5: Dadas las funciones por tramos:

$\boldsymbol{a})f(x) = \begin{cases} |x+3| & si\ x \leq 0 \\ 3 - x^2 & si\ x > 0 \end{cases}$ en x = -3 ; en x = 0

$$\boldsymbol{b})f(x) = \begin{cases} |x^3| & si\ x \leq 1 \\ -x+3 & si\ x > 1 \end{cases} \quad \text{en x=0 ; en x=1}$$

i) Representarla gráficamente.

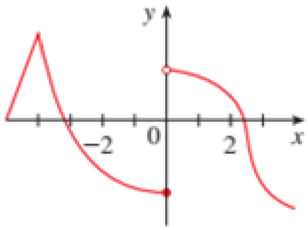
ii) Escribir la expresión de la función derivada para cada tramo y graficarla en otro sistema de ejes.

iii) Determinar analíticamente si ***f(x)*** es derivable en ***los puntos indicados***.

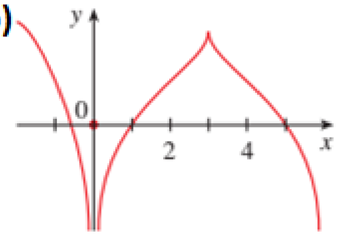
iv) Determinar si ***f(x)*** es continua en ***los puntos indicados***.

Actividad Nº 6: Indicar en cuáles valores las funciones no son derivables, justificando en cada caso:

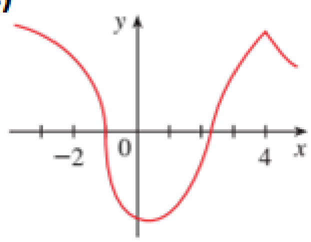
a)



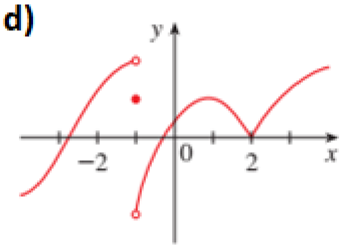
b)



c)



d)



Actividad Nº 7: Ciertas funciones analizadas en un valor pueden aproximarse mediante derivadas sucesivas como polinomios denominados de Taylor. Las calculadoras lo utilizan para calcular valores de algunas funciones no polinómicas con buena aproximación.

La expresión analítica de un polinomio de Taylor de grado n es:

$$P_n(x) = P(a) + P'(a)(x-a) + \frac{P''(a)(x-a)^2}{2!} + \frac{P'''(a)(x-a)^3}{3!} + \cdots + \frac{P^n(a)(x-a)^n}{n!}$$

(Si el polinomio está centrado en a=0 recibe el nombre de polinomio de McLaurin).

a) Aproximar la función $f(x) = Sen(2x)$ y $f(x) = Cos(3x)$ como polinomios de Taylor de grado 4, centrados en x=0 (McLaurin).

b) Graficar con una aplicación la función junto con su aproximación por polinomio de McLaurin atendiendo especialmente a un entorno del punto 0.

Actividad Nº 7 bis: Encontrar el polinomio de Taylor de grado 4, centrado en x=1, para aproximar $f(x) = \ln{(x+1)}$

Actividad Nº 8: Resolver las siguientes situaciones problemáticas:

I) Un objeto con peso W es arrastrado a lo largo de un plano horizontal por una fuerza que actúa a lo largo de una cuerda sujeta al propio objeto. Si la cuerda forma un ángulo θ con el plano, después la magnitud de la fuerza es $F = \frac{\mu W}{\mu\, Sen\,\theta + Cos\,\theta}$; donde μ es una constante llamada coeficiente de fricción.

a) ¿Cuáles son las variables?

b) Encontrar la relación de cambio de F con respecto a la variable de la que depende.

II) El movimiento de un resorte que se somete a una fuerza de fricción o una fuerza de amortiguamiento (como un amortiguador en un automóvil) se modela a menudo mediante el producto de una función exponencial y una función seno o coseno. Suponga que la ecuación del movimiento de un punto sobre tal resorte es

$$s(t) = 2\,e^{-1.5\,t}\,Sen\,2\pi t$$

donde *s* se mide en centímetros y *t* en segundos.

a) Hallar la velocidad después que transcurren t segundos. Expresarlo de manera conveniente.

b) Utilizar un graficador y dibujar las funciones de posición y de velocidad para el intervalo $0 \leq t \leq 2$

c) Interpretar el resultado en el contexto del problema.

DIFERENCIALES

Actividad Nº 1: Hallar Δy ; dy para los valores dados de x ; $\Delta x = dx$ para la siguiente función:

$$y = e^{x} \; ; \; x = 0, \Delta x = 0{,}5$$

Graficar la función indicando los segmentos Δy ; dy

Actividad Nº 2: Resolver las siguientes situaciones problemáticas:

I) Se midió el radio de una esfera y se encontró que es 21 cm con un posible error en medición de cuanto mucho 0.05 cm. ¿Cuál es el error máximo al usar este valor del radio para calcular el volumen de la esfera?

II) Sabiendo que el período de oscilación de un resorte se calcula mediante la expresión $T = 2\pi . \sqrt{\frac{m}{k}}$ determinar de manera aproximada, usando diferenciales, el error en la medición de la constante de elasticidad K si el período T posee una variación de 12 a 12,18 segundos cuando la masa sujeta al resorte es de 3 kg. Comparar el error aproximado con diferenciales con el error o variación absoluta.

III) Una ventana triangular de 3 m de base y 4 m de altura es modificada variando su altura en 15 cm.

a) Determinar mediante diferenciales la variación aproximada del área.

b) Calcular si hay diferencia entre el cálculo de la variación del área por diferenciales y el cálculo mediante incremento.

IV) Utilizar diferenciales para estimar la cantidad de pintura necesaria para aplicar una mano de 0.05 cm de espesor a un domo hemisférico que tiene un diámetro de 50 m.

V) Un disco metálico se dilata por la acción del calor de manera que su radio aumenta de 5 a 5.06 cm. Hallar el valor aproximado del incremento del área.

TRABAJO PRÁCTICO Nº 7: APLICACIONES DEL CÁLCULO DIFERENCIAL

Pre clase: Dados los siguientes gráficos, reconocer y marcar los siguientes elementos:

a) Dominio e Imagen.

b) Asíntotas: verticales, horizontales y oblicuas, si existen.

c) Puntos de discontinuidad, y clasificar.

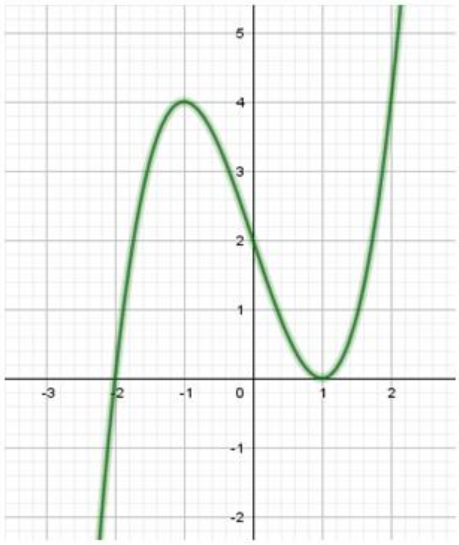
d) Puntos máximos y mínimos.

e) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

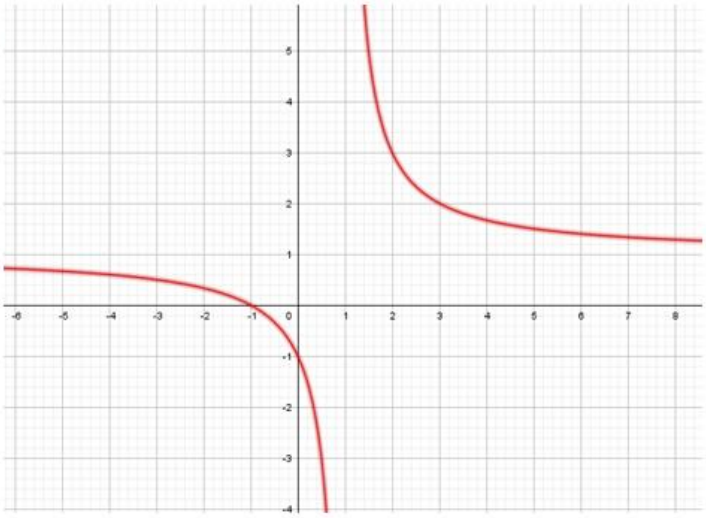
f) Puntos de inflexión.

g) Intervalos de concavidad y convexidad.

I)



II)



Actividad N° 1: Dadas las siguientes funciones, determinar:

a) Dominio e Imagen.

b) Intersección con los ejes coordenados.

c) Puntos de discontinuidad.

d) Asíntotas.

e) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

f) Extremos relativos.

g) Intervalos de concavidad y convexidad.

h) Puntos de Inflexión.

a. $f(x) = \frac{1}{4}\, x^4 - \, x^3$ b. $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$ c. $f(x) = \frac{3x^2-12}{x^2+x-2}$

AUTO EVALUACIÓN: Dada la función: $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+1}{x^2-4} & \text{si} \quad x \neq 2 \\ 2 & \text{si} \quad x = 2 \end{cases}$

a) Determinar coordenadas y tipos de extremos relativos.

b) Analizar intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) Determinar coordenadas de puntos de inflexión.

d) Obtener la ecuación de la recta tangente a la función dada, que pasa por x = 3.

e) Graficar la función y la recta obtenida.

Actividad Nº 2: Dada la función: $y = \frac{2}{1-3x}$

a) Determinar la ecuación de la recta tangente y de la recta normal en la abscisa $x = 0$

b) Representar la función y las rectas halladas.

Actividad Nº 3: Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = \frac{2}{x+1}$ que son paralelas al segmento que une los puntos (1, -1) y (3,-5).

Actividad Nº 4: Determinar la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx$ cuya tangente en (1, 1) tiene por ecuación $y = 3x — 2$. Comprobar con un graficador.

Situación problemática 1: determine el valor de los coeficientes a y b en $f(x) = ax^3 + bx^2 + x$ sabiendo que la función tiene un máximo en $x = 1$ y que $f(1) = 2$.

Situación problemática 2: calcular los coeficientes a, b y c en $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ sabiendo que (1; 2) es mínimo y en $x = 3$ hay punto de inflexión.

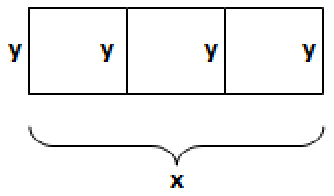
Situación problemática 1: Se desea construir una caja sin tapa con una lámina rectangular de 16 cm de largo y 24 cm de ancho ¿Cuál es la medida del lado del cuadrado que debe cortarse en cada esquina para que sea máximo el volumen de la caja? ¿Cuál es el valor de dicho volumen **máximo**?

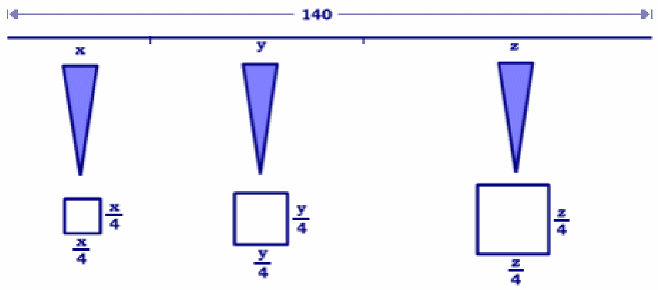
Situación problemática 2: Una ventana tiene forma rectangular, coronado por un triángulo equilátero. Encuentre las dimensiones del rectángulo para que la ventana permita la **máxima** entrada de luz si el perímetro de la misma debe ser de 12 metros.

Situación problemática 3: Se pretende fabricar una lata de conserva cilíndrica (con tapa) de 1 litro de capacidad. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones para que se utilice el **mínimo** posible de metal?

Situación problemática 4: Descomponer el número 44 en dos sumandos tales que el quíntuplo del cuadrado del primero más el séxtuplo del cuadrado del segundo sea un **mínimo**.

Situación problemática 5: Un jardinero dispone de 160 metros de alambre que va a utilizar para cercar una zona rectangular y dividirla en tres partes. Las alambradas de las divisiones deben quedar paralelas a uno de los lados del rectángulo. ¿Qué dimensiones debe tener la zona cercada para que su área sea la **mayor posible**?





Situación problemática 6: Se dispone de un hilo metálico de longitud 140 metros. Se quiere dividir dicho hilo en tres trozos de forma que uno de ellos tenga longitud doble de otro y tal que al construir con cada uno de ellos un cuadrado, la suma de las áreas de los tres cuadrados sea mínima. Encontrar la longitud de cada trozo.

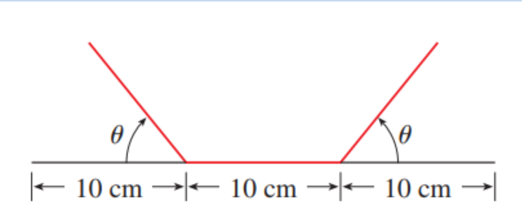
AUTO EVALUACIÓN:

Situación Problemática 1: Un trozo de alambre de 10 m de largo se corta en dos partes.

Una se dobla para formar un cuadrado y la otra para formar un triángulo equilátero. ***¿Cómo debe cortarse el alambre de modo que el área total encerrada sea (a) máxima, y (b) mínima?***

<u>Situación problemática 2:</u> Se va a construir un canal para el agua de lluvia a partir de una
lámina de metal de 30 cm de ancho doblando hacia arriba una tercera parte de la lámina en cada lado a través de un ángulo θ.

¿Cómo debe elegirse θ de manera que el canal conduzca la mayor cantidad de agua?



TRABAJO PRÁCTICO Nº 8: REGLA DE L' HÔPITAL

Actividad N° 1: Evaluar los siguientes límites aplicando la Regla de L'Hôpital cuando corresponda:

a- $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3.\cos x}{2x-\pi}\right)$

b- $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\tan x}\right)$

c- $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^{3x+2}}{x^2}\right)$

d- $\lim_{x\to 0}\left(\frac{4}{x^2}-\frac{2}{1-\cos x}\right)$

e- $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

f- $\lim_{x\to 0^+}(x.\ln x)$

g- $\lim_{x\to\infty}(x^{-2}.e^{x})$

h- $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$

i- $\lim_{x\to 1^+}(x-1)^{\ln x}$

j- $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{sen\,x}$

k- $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(tg\,x-1).\sec 2x$

l- $\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen\,3x}{x-\frac{3}{2}\,sen\,2x}\right)$

Actividad N° 2: De ser posible determinar la convergencia de la sucesión

$(a_n) = \left(\frac{n}{2^n}\right)$

AUTO EVALUACIÓN: Dada la función:

Sea: $f(x) = \begin{cases} \ln(x^2+1).\frac{2}{x^2} & ; \quad x < 0 \\ a & ; x = 0 \\ \frac{sen^2 x}{1-\sqrt{1-x}} & ; \ 0 < x < 1 \end{cases}$

Determinar analíticamente si existe valor de $\boldsymbol{a}$ para que la función resulte continua en $x = 0$.

TRABAJO PRÁCTICO Nº 9: INTEGRALES INDEFINIDAS

Pre clase: Se arroja hacia arriba un objeto desde lo alto de un edificio de cierta altura a una cierta velocidad v_0. Determinar la función trayectoria del objeto sabiendo que al segundo de haber sido arrojada (al segundo el objeto se encuentra en ascenso) la velocidad de la misma es de $5m/s$, y su altura es de 30 metros (suponer que la gravedad es de $g = 10\ m/s^2$).

Actividad N° 1 Hallar $f(x)$ a partir de $f'(x) = 2x + 1$ y $f(2) = 4$. Comprobar el resultado comparando las gráficas de $f'(x)$ y $f(x)$.

Problema: A través de una investigación se ha determinado que la población *P(t)* de una colonia de bacterias, *t* horas después de iniciar la observación, tiene una razón de cambio de $P'(t) = 200.e^{0,1t} + 150\,.\,e^{-0,3t}$. Si la población era de 200 000 bacterias cuando inicio la observación, ¿Cuál será la población 10 horas después?

Actividad N° 2: Resolver las siguientes integrales inmediatas

a) $\int 5x\,dx$ b) $\int -2x^{-1}\,dx$ c) $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx$ d) $\int 2sen(x)dx$

Actividad N° 3: Resolver las siguientes integrales por el Método de Integración por Descomposición:

a) $\int (2x^2 + 3 - 2e^x)dx$

b) $\int (senx + \sec^2 x)\, dx$

c) $\int \frac{1-\sqrt{x}.e^x+x}{\sqrt{x}} dx$

Actividad N° 4: Resolver las siguientes integrales aplicando el Método de Integración por Sustitución:

a) $\int 3(2x+1)^3 dx$

b) $\int (3x^2+2).cos(2x^3+4x)dx$

c) $\int \frac{cosx}{\sqrt{1+senx}} dx$

d) $\int \frac{x-\frac{3}{2}}{x^2-3x+4} dx$

e) $\int \frac{1}{x(Ln\, x)^2} dx$

Actividad N° 5: Resolver las siguientes integrales aplicando el Método de Integración por Parte:

a) $\int e^{3x}(x+2)\, dx$

b) $\int x.\ln\left(\frac{1}{x}\right) dx$

c) $\int 2x.cos(5x)\, dx$

d) $\int e^x.sen\, x\, dx$

e) $\int (x^2+1).sen\,(n\pi x)\, dx$

Actividad N° 6: Resolver las siguientes integrales de Funciones Racionales Fraccionarias:

f) $\int \frac{2x^2-3x+1}{x^3-4x} dx$

g) $\int \frac{x-1}{x^3+x^2-2x} dx$

h) $\int \frac{x^3+4}{x^2-5x+6} dx$

i) $\int \frac{x}{(x-1)^2} dx$

j) $\int \frac{x^2-3x}{(x-1)(x^2-4x+4)} dx$

Actividad Nº 7 Resolver las siguientes integrales de Potencias de Funciones Circulares:

a) $\int \cos^3(3x) dx$

b) $\int sen^4(2x) dx$

c) $\int \cos^3 x . sen^2 x\, dx$

d) $\int \frac{\sec^2 x}{cosec^3 x} dx$

Actividad N° 8: Hallar $f(x)$ a partir de $f'(x) = \frac{sen^3(x)}{\cos(x)}$ sabiendo que $f(0) = 0$

Actividad N° 9: Resuelve las siguientes integrales, identificando el método de integración

1. $\int \left(cos^3 x + \frac{1}{x^2-1}\right) dx =$
2. $\int \left(sen^3 x + \frac{4}{x^2-4}\right) dx =$
3. $\int \left(\frac{sen\, x}{1-sen^2 x} + \frac{3}{x^2-1}\right) dx =$
4. $\int \ln(x^2) . (2+x)\, dx =$
5. $\int [e^{\cos x} sen\, x + sen^3(2x)]\, dx =$
6. $\int \left(x. e^x + \frac{x}{x^2-6}\right) dx =$

AUTO EVALUACIÓN:

Actividad: Resolver la siguiente integral: $\int\left[x^2 . e^{x^3-2}+2^{2x} . sen(2x)\right]dx$

Situación problemática: Determinar la función $f_{(x)}$ si la recta normal al gráfico de f en $x_0=1$ es $6y+x=37$ y $f''_{(x)}=6x+2$

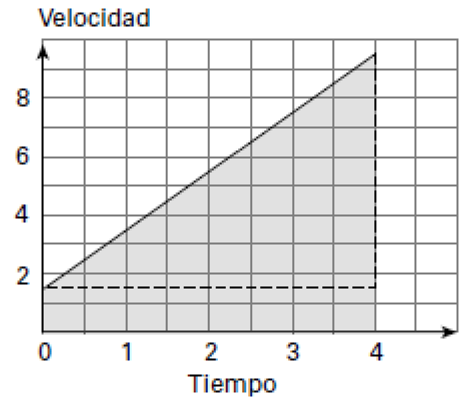
TRABAJO PRÁCTICO Nº 10: INTEGRALES DEFINIDAS
APLICACIONES DEL CÁLCULO INTEGRAL

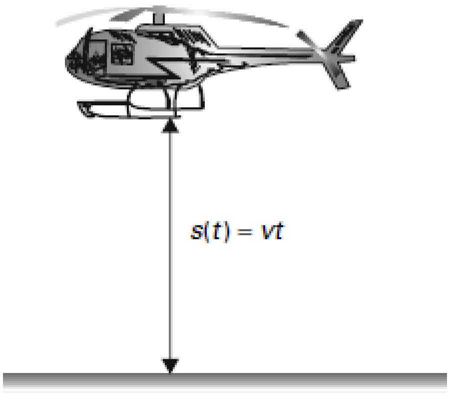
Pre clase: Un helicóptero se eleva de tal manera que su velocidad *v*, en función del tiempo *t*, se modela con la ecuación $v = 2t + 1.5$ pies por segundo.

a) Completar la siguiente tabla de velocidad sustituyendo el valor del tiempo en la ecuación $v = 2t + 1.5$ cada medio segundo durante los primeros 4 segundos.

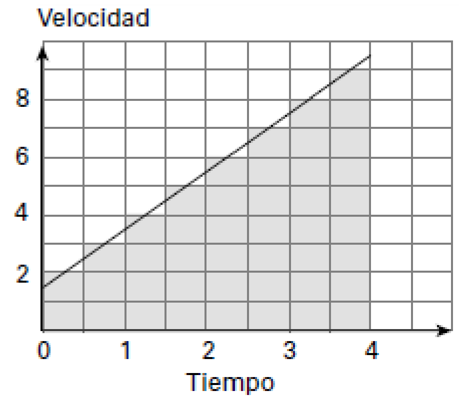
Tiempo (s)	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
Velocidad (pies/s)									

b) Calcular el área gris bajo la gráfica de $v = 2t + 1.5$ y observar que corresponde a la elevación del helicóptero durante los primeros 4 segundos, puesto que para obtener el área mencionada se tiene que multiplicar *velocidad por tiempo* ($s = v.t$).



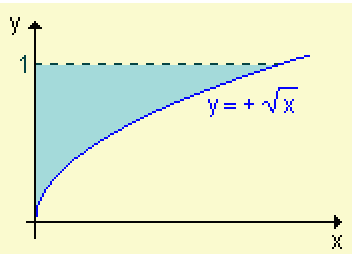


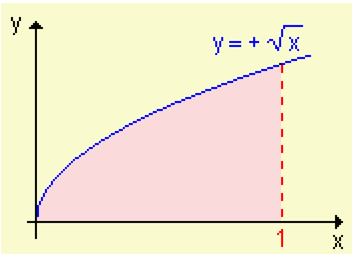
c) Estimar el área del punto anterior sumando las áreas de los rectángulos de aproximación mostrados en la siguiente gráfica. Para tal fin calcular el valor de las alturas de los rectángulos sustituyendo en la ecuación $v = 2t + 1.5$ el valor de t que corresponde al punto medio de la base de éstos. Por ejemplo, la altura del primer rectángulo es 2(0.25)+1.5 = 2.



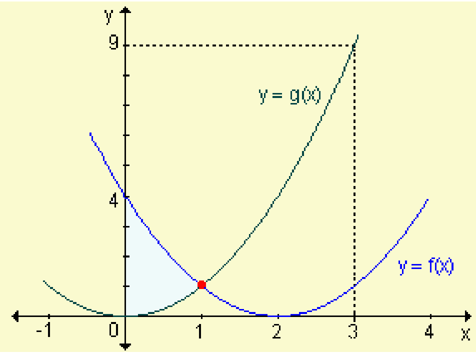
d) Comentar con sus compañeros las conclusiones del experimento anterior.

Actividad Nº 1: Hallar el valor del área sombreada



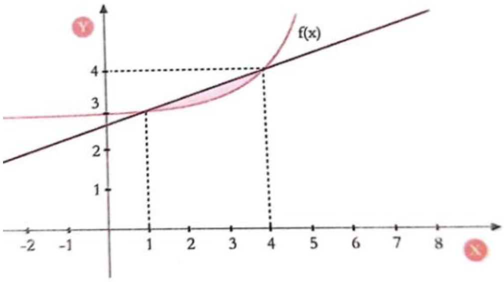


Actividad Nº 2: ¿Cuál es el área de la región sombreada?, siendo $f_{(x)} = (x-2)^2$ y $g_{(x)} = x^2$



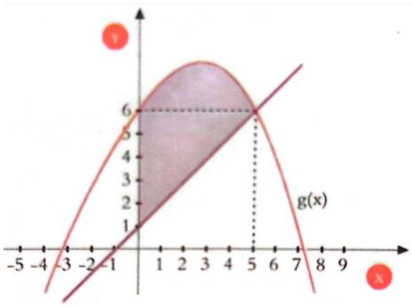
Actividad Nº 3: Considerando que el area de la región sombreada es 2, hallar el valor de

$$\int_1^4 f(x)dx$$



Actividad Nº 4: Considerando que el área de la siguiente región sombreada es 25, calcule:

$$\int_0^5 g(x)dx$$



Actividad Nº 5: Calcular el área de la región acotada por las gráficas de $y_1 = x^2 + 2$, $y_2 = -x$, $x = 0$, y $x = 1$. Graficar y sombrear el área calculada.

Actividad Nº 6: Calcular el área comprendida entre la función $f(x) = x^5 - 3x^3$, eje x positivo y las rectas verticales que pasan por los puntos de inflexión de $f(x)$.

Actividad Nº 7: Calcular el área de la región comprendida entre las gráficas de las funciones:

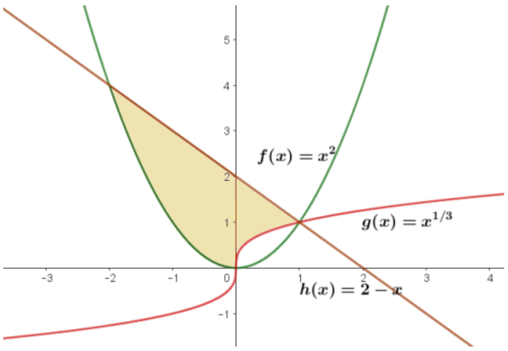
$f_{(x)} = 3x^3 - x^2 - 10x$ y $g_{(x)} = -x^2 + 2x$. Graficar y sombrear el área calculada.

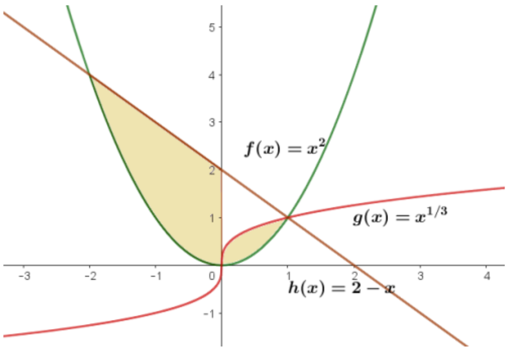
Actividad Nº 8: Calcular el área comprendida entre las funciones $f(x) = \frac{6}{x+2}$ y $g(x) = |x-3|$. Representar gráficamente y señalar el área comprendida

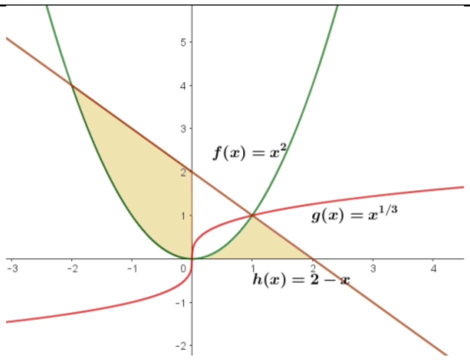
Actividad Nº 10: Calcular el área de la figura limitada por las parábolas: $y^2 = 16 - x$ y $(y+2)^2 = x + 4$. Graficar las funciones y sombrear la región calculada.

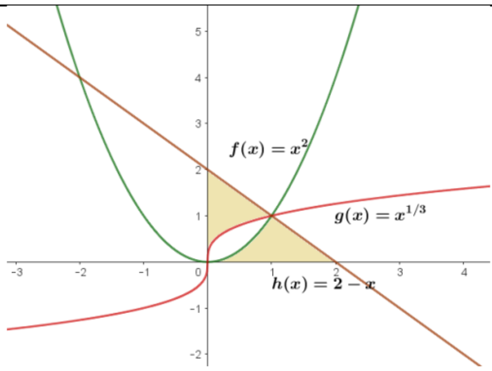
Actividad Nº 11: Calcular el área de la región limitada por las gráficas de $f(x) = sen\, x$ y $g(x) = cos\, x$ entre $x = \pi/4$ y $x = 5\pi/4$.

Actividad Nº 12: Dados los siguientes gráficos, proponer las integrales correspondientes que permitan calcular el área de los recintos sombreados (no se resuelve):









Actividad Nº 13: La función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, tiene mínimo relativo en (0,2), punto de inflexión en $x = -\frac{1}{6}$ y $\int_{-1}^{0} f(x)dx = \frac{5}{3}$. Determinar los valores de a, b, c y d.

Actividad Nº 14: Encuentre, si existe, el valor de m para el cual el área de la región limitada por el gráfico $h(x) = x^2 - m^2$ y el de $g(x) = m^2 - x^2$ sea de 576 u.a.

Situación problemática 2: El comportamiento del consumo de petróleo se ha modificado en los últimos años. El ritmo de consumo (en miles de millones de barriles) de petróleo en EE.UU. entre 1960 y 1979 admite el modelo:

$$f_{(t)} = 0{,}18\, t + 5{,}38 \qquad -10 \leq t \leq 9$$

donde t = 0 corresponde a 1970. De 1979 a 1993, el consumo admite el modelo:

$$g_{(t)} = -\,0{,}0029\, t^3 + 0{,}149\, t^2 - 2{,}42\, t + 18{,}38 \qquad 9 \leq t \leq 23$$

Hallar el ahorro total entre 1979 y 1993 como consecuencia de ese nuevo esquema de consumo. Representar el área que representa el ahorro total utilizando GeoGebra.

<u>LONGITUD DE UN ARCO DE CURVA</u>

Actividad Nº 1: Determinar la longitud de la curva $y = \frac{4\sqrt{2}}{3} x^{3/2}$ para $0 \leq x \leq 1$.

Actividad Nº 2: Determinar la longitud de la curva $y = \left(\frac{1}{3}\right).(x^2 + 2)^{\frac{3}{2}}$, de x = 0 a x = 3. *(Sugerencia, tener en cuenta el cuadrado de un binomio)*

Actividad Nº 3: Calcula la longitud de arco de $(y + 2)^2 = 9(x + 2)^3$ en $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$.

VOLUMEN DE UN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN

Actividad Nº 1: La región entre la curva $y = \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 4,$ y el eje x se hace girar alrededor del eje x para generar un sólido. Determinar su volumen. Graficar

Actividad Nº 2: Determinar el volumen del sólido resultante al hacer girar la región comprendida entre la parábola $x = y^2 + 1$ y la recta $x = 3$ alrededor del eje y (Rotación alrededor de un eje vertical).

Actividad Nº 3: Para generar un sólido se hacen girar la región acotada por la curva $y = x^2 + 1$ y la recta $y = -x + 3$ alrededor del eje x. Determinar el volumen del sólido engendrado *(Sugerencia: tomar arandelas como secciones transversales y rotación alrededor del eje x)*

Actividad Nº 4 Calcula el volumen que se obtiene al hacer girar alrededor del $\boldsymbol{eje\ x}$ el recinto limitado por las funciones:

$f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = -x + 3$ y para $1 \leq x \leq 2$

Actividad Nº 5 Halla el volumen del cuerpo limitado por la elipse $\frac{x^2}{25} + y^2 = 1$ al dar una vuelta completa sobre el eje x

ÁREA DE UN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN

Actividad Nº 1: La curva $y = \sqrt{4 - x^2}$, con $1 \leq x \leq 1$, es un arco de círculo $x^2 + y^2 = 4$. Encuentre el área de la superficie obtenida al hacer girar este arco respecto al eje *x*.

Actividad Nº 2: El arco de parábola $y = x^2$ de (1;1) a (2;4) se hace girar respecto del eje *y*. Encuentre el área de la superficie resultante.

INTEGRALES PROPIAS E IMPROPIAS

Actividad: En cada uno de los ejercicios estudiar la convergencia o divergencia de la integral

a) $\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx$

b) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$

c) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^3}$

d) $\int_1^{\infty} \frac{x\,dx}{(1+x^2)^4}$

e) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{4+x^2}$

f) $\int_2^{6} \frac{dx}{\sqrt{6-x}}$

$g)$ $\int_3^{\infty} \frac{x-\frac{3}{2}}{x^2-3x+4}\,dx$

$h)$ $\int_0^{1} \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}\,dx$

$i)$ $\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^4}\,dx$

$j)$ $\int_1^{10} \frac{5}{x^2-1}\,dx$

AUTO EVALUACIÓN:

Actividad 1: Dadas las funciones $f(x) = \frac{1}{x-3} + 2$ y $g(x) = -x - 1$

a) Determinar analíticamente los puntos de intersección entre ambas funciones.

b) Graficar ambas funciones en el mismo sistema de ejes.

c) Determinar analíticamente el área comprendida entre las funciones.

d) Calcular el área entre la función homográfica, la asíntota horizontal, $x = 4$ y $x = 5$.

e) Sombrear las áreas calculadas.

Actividad 2: Dibujar la superficie plana limitada por la gráfica de $f_{(x)} = x^3 - 3x + 3$ y la recta que pasa por $\left(a; f_{(a)}\right) y \left(b; f_{(b)}\right) si f_{(a)} y f_{(b)}$ son los valores máximos y mínimos de f. Calcular aplicando integrales dicha área.

TRABAJO PRÁCTICO Nº 11: SERIES NUMÉRICAS Y DE POTENCIAS

Actividad Nº 1: Clasificar las siguientes series aplicando el criterio de D'Alembert:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{(\sqrt{2})^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2^n}{3^n}$

Actividad Nº 2: Clasificar las siguientes series aplicando el criterio de la Raíz o de Cauchy:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$