<u>Unidad Temática II:</u> <u>*Límites y Continuidad*</u>

<u>La idea de límite</u>: La idea de límite, aparece intuitivamente en muchas situaciones.
En **geometría elemental**, se define la **longitud de una circunferencia** como el límite a que tiende una sucesión de perímetros de polígonos inscriptos o circunscriptos a ella, cuando la longitud de cada lado tiende a cero. Esto ocurre cuando el número de lados crece indefinidamente. La misma idea se utiliza para definir el **área de un círculo** mediante áreas de polígonos inscriptos o circunscriptos.

$P_{i3} < P_{circuito} = L_c$

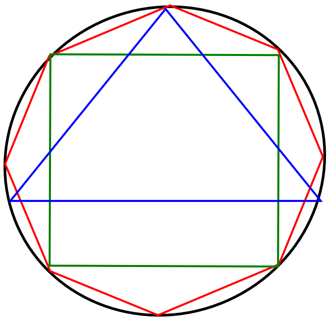
$P_{i4} < P_c = L_c$

$P_{i8} < P_c = L_c$

$----------$

$P_{in} < P_c < L_{cn}$

$\underset{n\to\infty}{P_{in}} = l_c = \underset{n\to\infty}{P_{cn}}$



En **Física**, para definir la velocidad instantánea se recurre al límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo es cada vez menor.
En la **vida diaria** podríamos pensar a que temperatura tiende un líquido caliente al dejarlo fuera del fuego, o un líquido frío si lo dejamos afuera de la heladera, si en el ambiente hacen 25° C.

Propuesta: leer del capítulo 1, pág. 48-50, del libro digital:

CALCULO%20DE%20DIFERENCIAL%20E%20INTEGRAL/calculo%201%20de%20una%20variable,%209na%20edición%20-%20ron%20larson.pdf

En el cual se propone como objetivos:

- Estimar un límite utilizando los métodos numéricos y gráficos.
- Aprender diferentes formas en las que un límite puede no existir.
- Estudiar y utilizar la definición formal de límite.

Introducción a los limites

Se pide dibujar la gráfica de la función: $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}, \quad x \neq 1$

Para todos los valores distintos de $x = 1$, es posible emplear las técnicas usuales de representación de curvas. Sin embargo, en *x=1* no está claro que se puede hacer. Para analizar el comportamiento de la función cuando *x* se acerca a 1, por derecha y por izquierda realizamos la siguiente tabla:

x se aproxima a 1 por la izquierda. → ← x se aproxima a 1 por la derecha.

x	0.75	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1	1.25
$f(x)$	2.313	2.710	2.970	2.997	?	3.003	3.030	3.310	3.813

$f(x)$ se aproxima a 3. → ← $f(x)$ se aproxima a 3.

Como se muestra en la figura 1.5, la gráfica de f es una parábola con un hueco en el punto (1, 3). A pesar de que x no puede ser igual a 1, se puede acercar arbitrariamente a 1 y, en consecuencia, $f(x)$ se acerca a 3 de la misma manera. Utilizando la notación que se emplea con los límites, se podría escribir

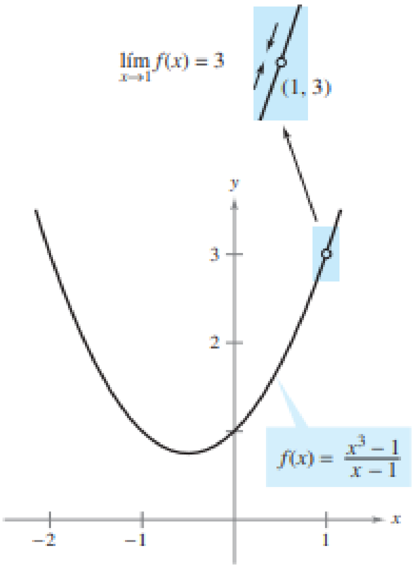
$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3.$$

Esto se lee "el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a 1 es 3".

Este análisis conduce a una descripción informal de límite. Si $f(x)$ se acerca arbitrariamente a un número L cuando x se aproxima a c por cualquiera de los dos lados, entonces el **límite** de $f(x)$, cuando x se aproxima a c, es L. Esto se escribe

$$\lim_{x \to c} f(x) = L.$$

Su gráfica es:



EXPLORACIÓN

El análisis anterior proporciona un ejemplo de cómo estimar un límite de *manera numérica* mediante la construcción de una tabla, o de *manera gráfica*, al dibujar un esquema. Calcular el siguiente límite de forma numérica al completar la tabla.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$$

x	1.75	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1	2.25
$f(x)$	?	?	?	?	?	?	?	?	?

Luego utilizar una herramienta de graficación para estimar el límite.

Analiza los siguientes ejemplos:

EJEMPLO 1 Estimación numérica de un límite

Evaluar la función $f(x) = x/\left(\sqrt{x+1} - 1\right)$ en varios puntos cercanos a $x = 0$ y usar el resultado para estimar el límite:

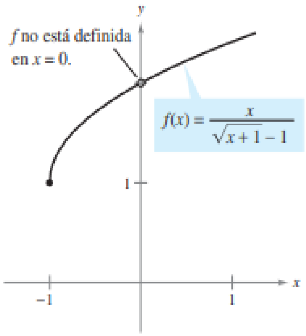
$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}.$$

Solución En la siguiente tabla se registran los valores de $f(x)$ para diversos valores de x cercanos a 0.

x se aproxima a 0 por la izquierda. → ← x se aproxima a 0 por la derecha.

x	-0.01	-0.001	-0.0001	0	0.0001	0.001	0.01
$f(x)$	1.99499	1.99950	1.99995	?	2.00005	2.00050	2.00499

$f(x)$ se aproxima a 2. → ← $f(x)$ se aproxima a 2.



El límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a 0 es 2
Figura 1.6

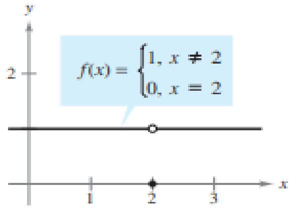
De los datos mostrados en la tabla, se puede estimar que el límite es 2. Dicho resultado se confirma por la gráfica de f (ver la figura 1.6).

Observar que en el ejemplo 1, la función no está definida en $x = 0$ y aún así $f(x)$ parece aproximarse a un límite a medida que x se aproxima a 0. Esto ocurre con frecuencia, y es importante percatarse de que la *existencia o inexistencia de $f(x)$ en $x = c$ no guarda relación con la existencia del límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a c.*

EJEMPLO 2 Cálculo de un límite

Encontrar el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a 2, donde f se define como

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2. \end{cases}$$



El límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a 2 es 1
Figura 1.7

Solución Puesto que $f(x) = 1$ para todos los x distintos de $x = 2$, se puede concluir que el límite es 1, como se muestra en la figura 1.7. Por tanto, se puede escribir

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 1.$$

El hecho de que $f(2) = 0$ no influye en la existencia ni en el valor del límite cuando x se aproxima a 2. Por ejemplo, si se hubiera definido la función como

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 2 \\ 2, & x = 2 \end{cases}$$

el límite sería el mismo.

Hasta aquí se puede decir que se hallaron límites de manera numérica y gráfica. Cada uno de estos métodos genera una estimación del límite. Más adelante se estudiarán técnicas analíticas para evaluarlos. A lo largo de este curso, se trata de desarrollar el hábito de utilizar este método de árbol para resolver problemas.

1. Método numérico — Construir una tabla de valores.
2. Método gráfico — Elaborar una gráfica a mano o con algún dispositivo tecnológico.
3. Método analítico — Utilizar álgebra o cálculo.

<u>Definición</u> : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \,/\, \forall x : \left(x \in Df \wedge 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon\right)$

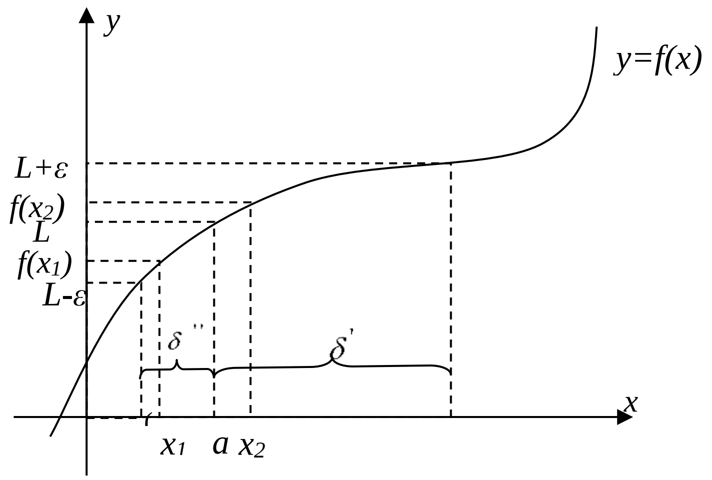
En general el número δ depende de ε Hallado un número δ que satisfaga la condición, cualquier número $\delta' < \delta$ también la satisface. Además, un número δ que sirve para un cierto ε servirá también para cualquier número mayor que ε pero nada se podrá asegurar respecto de uno menor.

$\boldsymbol{a}$ debe ser punto de acumulación del Dominio de la función para evitar que la definición se satisfaga trivialmente en puntos aislados.

Interpreta: *En la definición*: $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow x \in E'_{(a;\delta)} \wedge |f(x) - L| < \varepsilon \Rightarrow f(x) \in E_{(L;\varepsilon)}$

Representación e interpretación gráfica del límite

Gráficamente, trazamos paralelas al eje x por $L + \varepsilon$ y $L - \varepsilon$ hasta interceptar al gráfico de la función. Proyectamos esas intersecciones sobre el eje x. Así quedan determinados dos δ: δ' y δ'', que los podemos pensar como radio del $E'_{(a)}$. Si analizamos el gráfico, vemos que $\forall x \in E'_{(a;\,\delta'')}$: $f(x) \in E_{(L;\,\varepsilon)}$. Luego, el δ que debemos tomar es el menor de los dos en este caso, para que satisfaga la definición.



Ejemplo: Sea $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & si\ x \neq 3 \\ 4 & si\ x = 3 \end{cases}$

Nos interesa ver en que condiciones los valores de una función escalar se aproximan a un número real determinado cuando los puntos del dominio se acercan a un punto a que puede pertenecer o no a dicho dominio.

Calculemos algunos valores de la función en un $E'_{(3)}$, es decir sin preocuparnos por lo que sucede en dicho punto.

x	*f(x)*
2,8	4,6
2,9	4,8
2,99	4,98
2,999	4,998
3,2	5,4
3,1	5,2
3,01	5,02
3,001	5,002

Vemos que los valores de la función se acercan al número 5 cuando los valores de x se acercan al número 3. Aún más, la función puede alcanzar cualquier valor próximo a 5 con tal de considerar a x suficientemente próximo a 3.

Si se desea, por ejemplo, que el valor absoluto de la diferencia entre $f(x)$ y 5 sea menor que un centésimo, podemos considerar las siguientes proposiciones:

$|f(x)-5|<0{,}01 \Leftrightarrow |(2x-1)-5|<0{,}01 \Leftrightarrow |2x-6|<0{,}01 \Leftrightarrow 2|x-3|<0{,}01 \Leftrightarrow |x-3| < \frac{0{,}01}{2} \Leftrightarrow$

$|x-3|<0{,}005 \quad \therefore \quad 0<|x-3|<0{,}005 \;\Rightarrow\; |f(x)-5|<0{,}01$

Para los valores de x en el $E'_{(3;0{,}005)}$ los valores correspondientes a $f(x)$ se encuentran en el $E_{(5;0{,}01)}$
Obsérvese que se eligió primero 0,01 y en base a ese número se obtuvo el 0,005.
En general para cualquier número $\varepsilon>0$, basta considerar: $\delta = \varepsilon/2$, pues:

$0<|x-3|<\varepsilon/2 \Rightarrow 2|x-3|<\varepsilon \Rightarrow |2x-6|<\varepsilon \Rightarrow |(2x-1)-5|<\varepsilon.$

Luego: $\underset{x\to 3}{2x-1 \to 5}$

Dos propiedades de los LÍMITES:

1. Para $\boldsymbol{x}$ suficientemente próximo a a, la función tiene el mismo signo que su límite.
2. Si dos funciones tienen límites distintos para $x\to a$, la de mayor límite supera a la otra, $\forall x\to a$

Cálculo de algunos límites:

1)._ Límite de la función constante: $\lim_{x\to a} f(x)=k\;;\;\forall k\in\mathbb{R}$

Para probar que el número k es el límite buscado, significa encontrar, para cualquier número $\varepsilon>0$, un número $\delta>0$, que satisfaga la condición exigida por la definición. En este caso δ es cualquier número positivo, pues para cualquier $\varepsilon>0$ y para cualquier $\delta>0$, resulta:

$$\lim_{x\to a} f(x)=k \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta_{(\varepsilon)}>0 \;/\; \forall x:\left(x\in Df \wedge 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |k-k|=0<\varepsilon\right)$$

2)._ Límite de la función identidad: $\lim_{x\to a} x=a\;;\;\forall x\in\mathbb{R}$

En efecto, consideraremos un número positivo $\delta\le\varepsilon$; resulta:

$$\forall\varepsilon>0;\; \exists\delta\le\varepsilon \;/\; \forall x:(x\in Df \;\wedge\; 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|=|x-a|<\delta\le\varepsilon)$$

3)._ Límite de la función lineal: $f(x)=px+q;\; p\neq 0 \quad ; \quad \lim_{x\to a}(px+q)=p.a+q;\; \forall a\in\mathbb{R}$

Con la intención de encontrar el número $\delta>0$ correspondiente a la definición de límite, hacemos el siguiente planteo auxiliar:

$$|f(x)-L|<\varepsilon \Leftrightarrow |(p.x+q)-(p.a+q)|<\varepsilon \Leftrightarrow |p.(x-a)|<\varepsilon \Leftrightarrow |p|.|x-a|<\varepsilon \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |x-a|<\varepsilon/|p|$$

Luego, para cada $\varepsilon>0$, es posible determinar el número $\delta/\delta\le\varepsilon/|p|$, y se verifica:

$$0<|x-a|<\varepsilon/|p| \Rightarrow |f(x)-(p.a+q)|<\varepsilon$$

4)._ Límite de una función cuadrática: $f(x)=(x-a)^2;\quad \lim_{x\to a}(x-a)^2=0;\;\forall a\in\mathbb{R}$

Tengamos en cuenta que:

$$|(x-a)^2-0|<\varepsilon \Leftrightarrow |(x-a)^2|<\varepsilon \Leftrightarrow |x-a|^2<\varepsilon \Leftrightarrow |x-a|<\sqrt{\varepsilon}$$

Luego, en este caso, δ es cualquier número positivo $\le\sqrt{\varepsilon}$: $\delta\le\sqrt{\varepsilon}$

En efecto, $\forall\varepsilon>0,\; \exists\delta=\sqrt{\varepsilon} \;/\; \forall x:\left(x\in Df \wedge 0<|x-a|<\sqrt{\varepsilon} \Rightarrow |(x-a)^2|<\varepsilon\right)$

Teoremas sobre límites:

Sería muy dificultoso si todo problema de límite tuviera que resolverse a partir de la definición misma, o sea buscando el número δ que corresponde a cualquier ε dado y satisfacer las desigualdades exigidas en la definición. Vamos a dar algunos Teoremas generales sobre límites que permiten resolver problemas de manera más rápida y cómoda.

Los enunciados y demostraciones de estos Teoremas son los mismos para límites de funciones tomadas para $x \to \infty$ que para límites de funciones definidas sobre ciertos intervalos, tomados cuando $x \to \pm a$, o bien cuando $x \to \pm\infty$; por consiguiente los vamos a demostrar solamente para el caso de $x \to a$.

a).- El **límite del producto de una constante $\boldsymbol{k}$, por una función $\boldsymbol{f(x)}$**, es igual al producto de la constante por el límite L de la función, o sea:

$$\lim_{x\to a}\left[k \, . \, f(x)\right] = k . \lim_{x\to a} f(x) = k \, . \, L$$

b).- El **límite de una suma de funciones**, es igual a la suma de los límites de las funciones dadas, siempre y cuando los límites existan: $\lim\limits_{x\to a}\big(f_1(x) + f_2(x)\big) = \lim\limits_{x\to a} f_1(x) + \lim\limits_{x\to a} f_2(x) = L_1 + L_2$

c).- En forma análoga se demuestra que el **límite de la diferencia de funciones, es igual a la diferencia de los límites** de las funciones dadas, siempre y cuando los límites existan.

d).- El **límite del producto de funciones es igual al producto de los límites de las funciones** dadas, siempre y cuando los límites existan: $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f_1(x) . f_2(x)\right) = \lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) \, . \lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = L_1 . L_2$

e).- El **límite de la recíproca de una función es igual a la recíproca del límite**, siempre que dicho límite sea distinto a cero: $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)} = \dfrac{1}{L}$

f).- El **límite de un cociente de funciones** es igual al cociente de los límites, siempre que el límite del denominador sea distinto de cero: $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ *existe y es* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$

g).- El **límite de la opuesta** de una función es igual a la opuesta del límite.

h).- **<u>Unicidad del Límite</u>**: una función no puede tener, para $x \to x_0$, dos límites distintos.

Sí $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L_1 \wedge \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L_2$ *, entonces :* $L_1 = L_2$

i).- **<u>Teorema de Confrontación entre límites</u>:**

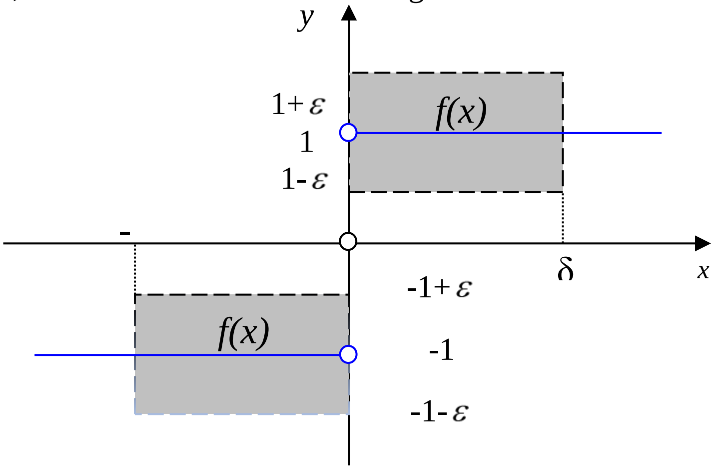
Si existe un intervalo abierto A que contiene a x_0 / $\forall \, x \neq x_0$: $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ y sí:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L \Rightarrow \lim_{x\to x_0} g(x) = L$$

Límites laterales

Al hablar de límite, tenemos que considerar puntos próximos al punto a, a ambos lados de dicho punto. Es decir, números reales en el $E'_{(a)}$, a derecha e izquierda del punto a. Interesa en algunos casos, el comportamiento de los valores de la función correspondiente a puntos del dominio a un solo lado, esto es, en un semientorno a la derecha o izquierda del punto a.

Ejemplo: Sea: $y=\frac{|x|}{x}$ $(función\ signo)$. Esta es una función que no tiene límite finito para $x \to 0$. Pero, puede pensarse en el límite de los valores de la función signo cuando $x \to 0$ con valores positivos exclusivamente, o bien, cuando $x \to 0$ con valores negativos exclusivamente.



A la derecha de 0, $\forall x \to 0$, se satisface la definición de límite con el número 1, puesto que:

$$\forall x \in E'\left(0^+;\delta\right) \Rightarrow f(x) \in E_{(1;\varepsilon)} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$$

análogamente, el límite de $f(x)$, cuando $x \to 0^-$ es o -1, puesto que:

$$\forall x \in E'\left(0^-;\delta\right) \Rightarrow f(x) \in E_{(-1;\varepsilon)} \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$$

Definiciones:

1)._ ***Límite lateral derecho o Límite por la derecha:*** L es el límite por la derecha de la función $f(x)$, en el punto $a \Leftrightarrow$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\ \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x: \left(x\ \in\ \mathrm{Df}\ \ \wedge\ \ a < x < a + \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \varepsilon\right)$$

a es punto de acumulación de $A = \{x\ /\ x \in Df\ \wedge\ x > a\}$

2)._ ***Límite lateral izquierdo o Límite por la izquierda***: L es el límite por la izquierda de la función $f(x)$, en el punto $a \Leftrightarrow$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\ \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x: \left(x\ \in\ Df\ \ \wedge\ \ a - \delta < x < \mathrm{a}\ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \varepsilon\right)$$

a es punto de acumulación de $A = \{x\ /\ x \in Df\ \wedge\ x < a\}$.

Considerando en cada caso semientornos a la derecha o a la izquierda del punto a, se pueden interpretar topológicamente las definiciones anteriores.

Luego, se puede demostrar que sí: $\lim_{x\to a^+} f(x) = L\ \wedge\ \lim_{x\to a^-} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = L$

Infinitésimos

Hemos visto lo que se entiende por límite de una función, las condiciones para que esta pueda tender a un límite, a varios o a ninguno, pudiendo en caso de existir límite, ser finito o infinito (se verá más adelante), y como se calculan.

Tienen especial importancia en Análisis Matemático las funciones que tienen por límite cero, denominados ***INFINITESIMOS***, que quedarían definidos de la siguiente manera: Una función $f(x)$ cuyo límite es 0, cuando $x \to a$ se dice que es infinitésimo en el punto$x = a$ o para x→a:

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0$$

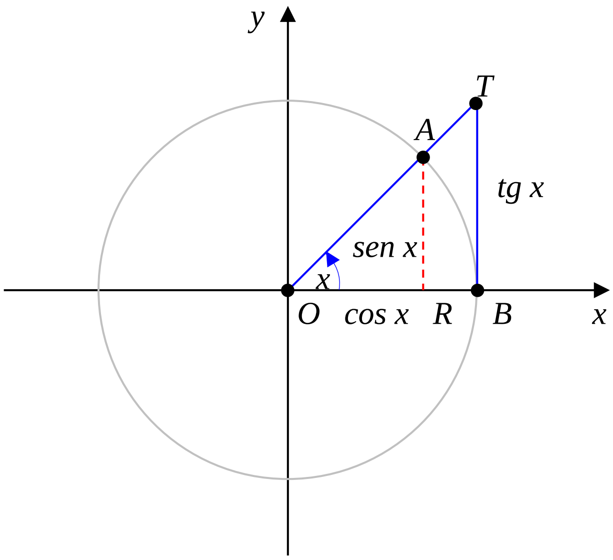
Ejemplos: sen x es infinitésimo para x=0 (x→0)
(1-cos x) es infinitésimo para x=0 (x→0)
(1-x) es infinitésimo para x=1 (x→1)
x^3 es infinitésimo para x=0 (x→0)
cos x es infinitésimo para x=π/2 (x→π/2)
Shx es infinitésimo para x=0 (x→0)
$(2x-1)^2$ es infinitésimo para x=1/2 (x→1/2)

Observaciones:

(I).- No hay números infinitésimos, sino funciones infinitésimas en un punto. No se puede decir que un número sea pequeño o grande si no se toma algún punto de referencia. Un milímetro es una longitud pequeña para las mediciones habituales, pero muy grande para la escala atómica.

(II).- Las funciones no son infinitésimas en general, sino en ciertos puntos de$x$. Así, $sen\ x$ es infinitésimo para$x \to k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$, pero no lo es para ningún otro valor de x.

Un límite importante: $\lim_{x \to 0} \frac{sen\,x}{x} = 1$



Si en la circunferencia trigonométrica se considera un ángulo central de x radianes, y en él la medida del arco $\overset{\frown}{AB}$ que queda determinado sobre la circunferencia, es x.

En B se traza la tangente TB, y entre las superficies de los triángulos $\overset{\Delta}{AOR}$ y $\overset{\Delta}{TOB}$, y el sector circular $\overset{\frown}{AOB}$, valen las relaciones:

$$\overset{\Delta}{AOR} \le sector\ \overset{\frown}{AOB} \le \overset{\frown}{TOB} \Rightarrow \text{Área}\ \overset{\Delta}{AOR} \le \text{Área sector}\ \overset{\frown}{AOB} \le \text{Área}\ \overset{\Delta}{TOB}$$

Las áreas correspondientes se pueden expresar en función de x; resultando:

$$\frac{senx.\cos x}{2} \le \frac{1}{2}\,x\,.\,1 \le \frac{1}{2}\,.\,1\,.\,tg\ x$$

dividiendo por: $\frac{sen\ x}{2}$ (que es un factor positivo, si$x$ es positivo): $\cos\ x \le \frac{x}{sen\ x} \le \frac{1}{\cos\ x}$

Esta desigualdad vale si cambiamos$x$ por$-x$, pues en este caso:

$$(-x) : sen\ (-x) = x : sen\ x \quad , \ y \quad \cos\ (-x) = \cos\ x$$

Luego: $\underset{x \to 0}{\cos x \to 1}$ y $\underset{x \to 0}{\frac{1}{\cos x} \to 1} \Rightarrow$ por el T. C. L.: $\underset{x \to 0}{\frac{x}{\text{sen } x} \to 1}$ y también: $\underset{x \to 0}{\frac{\text{sen } x}{x} \to 1}$

Se dice, entonces que, <u>*en el origen*</u> <u>*sen x*</u> *y* <u>*x*</u> <u>*son infinitésimos equivalentes.*</u>

En forma análoga, se prueba: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{tg } x}{x} = 1$ (en la prueba se divide por $\frac{tg\ x}{2}$). Siendo también $tg\ \ x$ y x <u>*infinitésimos equivalentes para x→0*</u>.

<u>Ejemplos:</u> $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sen^3\ x\,.\,tg^4\ x}{x^3} = \frac{\cancel{x^3}\,.\,x^4}{\cancel{x^3}} = \lim\limits_{x\to 0} x^4 = 0$

<u>Un Ejemplo sobre la **No Existencia de Límite**</u> (pg 98 y 99 de Stewart, "Cálculo en una variable")

V EJEMPLO 4 Una función con comportamiento oscilante Investigue $\lim\limits_{x\to 0} \text{sen}\,\frac{\pi}{x}$.

SOLUCIÓN Otra vez, la función $f(x) = \text{sen}(\pi/x)$ no está definida en 0. Si evaluamos la función para algunos valores pequeños de x, obtenemos

$$f(1) = \text{sen}\,\pi = 0 \qquad f(\tfrac{1}{2}) = \text{sen}\,2\pi = 0$$

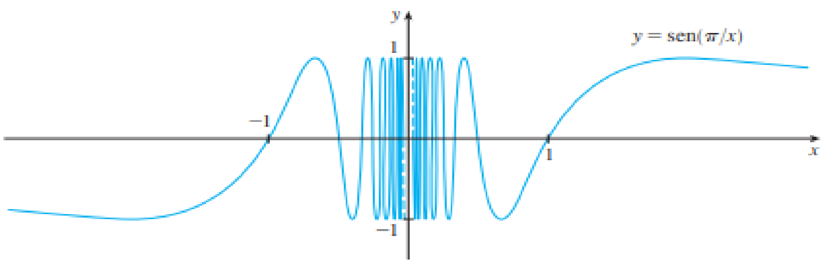
$$f(\tfrac{1}{3}) = \text{sen}\,3\pi = 0 \qquad f(\tfrac{1}{4}) = \text{sen}\,4\pi = 0$$

$$f(0.1) = \text{sen}\,10\pi = 0 \qquad f(0.01) = \text{sen}\,100\pi = 0$$

Del mismo modo, $f(0.001) = f(0.0001) = 0$. Con base en esta información podríamos estar tentados a intuir que

$$\lim_{x\to 0} \text{sen}\,\frac{\pi}{x} = 0$$

pero esta vez nuestro cálculo es erróneo. Observe que aun cuando $f(1/n) = \text{sen}\,n\pi = 0$ para cualquier entero n, también es cierto que $f(x) = 1$ para infinitamente muchos valores de x que se aproximan a 0. La gráfica de f está dada en la Figura 7.



Las líneas interrumpidas cerca del eje y, indican que los valores de $\boldsymbol{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$ oscilan entre 1 y -1 con frecuencia infinita cuando x se aproxima a 0. (Observe con una aplicación graficadora lo que sucede al acercarse al origen). Debido a que los valores de f(x) no se aproximan a un número "fijo" cuando x se aproxima a 0, se afirma que: $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0} sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$ **No Existe**

<u>Límite infinito para x tendiendo a un número finito</u>

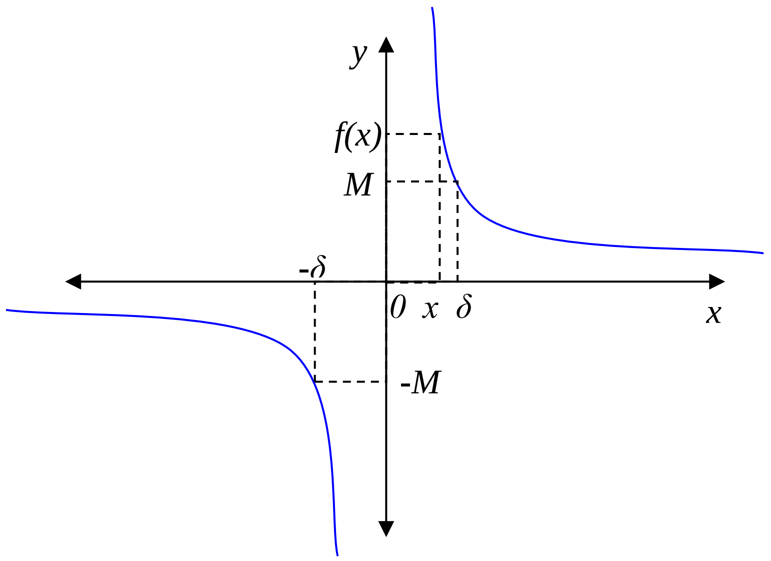
La no existencia de "límite finito" puede significar, que existan límites finitos distintos a derecha y a izquierda del punto $a$elegido como sucede en el origen para la función signo: $y = \frac{|x|}{x}$. También puede significar que la función oscila, como sucede en el origen para la función: $y = sen\frac{\pi}{x}$. O bien, que cuando$x \to a$, los valores de la función superan en valores absolutos a cualquier número prefijado.

Definición: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists \delta>0 \ / \ \forall x:\left(x\in Df \quad \wedge \quad 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)|>M\right)$

Ejemplo: $y=\frac{1}{x}$ que no tiene límite finito en el origen. Si prefijo cualquier número *M>0*, tan grande como se quiera, siempre es posible encontrar un $E'_{(0)}$, en el cual los valores correspondientes de la función en valor absoluto son mayores que *M*.

Para probar por definición tomo: $M=10^6$: $\left|\frac{1}{x}\right|>10^6 \quad \therefore \quad |x|<\frac{1}{10^6}$.
Es decir, para: $0<|x-0|<\frac{1}{10^6} \Rightarrow \left|\frac{1}{x}\right|>10^6$. De lo que se deduce que para cualquier valor de $x\in E'\left(0;\ {}^{1}\!/_{10^6}\right)$, la función toma valores, en valor absoluto mayores a 10^6. En general basta considerar: $\delta=\frac{1}{M}$ para que se verifique la proposición:
si: $0<|x-0|<\delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x}\right|>M$; pues: $|x|<\frac{1}{M} \Rightarrow \left|\frac{1}{x}\right|>M$

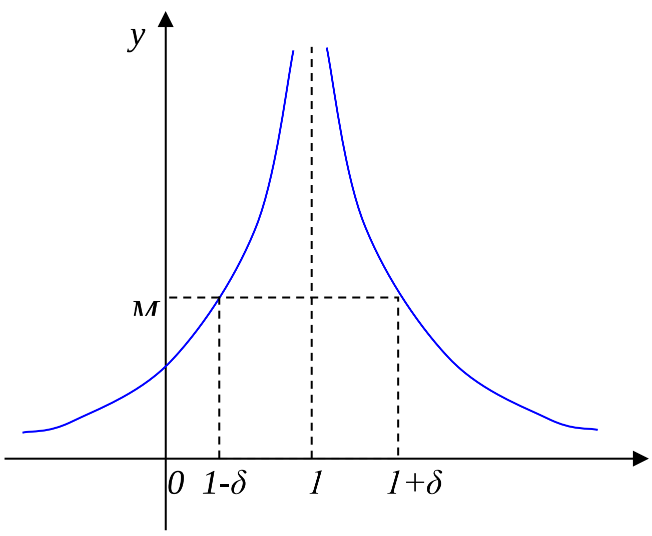
El concepto de límite se puede diversificar, considerando el signo de los valores de la función.



εε
Ejemplos:

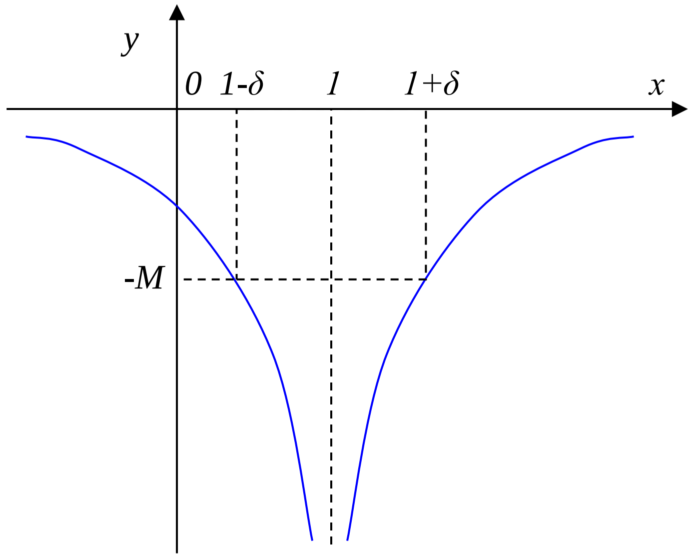
a).- Sea: $\frac{1}{(x-1)^2}$. Esta función no está definida para $x=1$. Del gráfico se desprende que para cualquier número *M>0* prefijado arbitrariamente y tan grande como se quiera, se puede determinar un número $\delta>0 \ / \ \forall \ x\in E'_{(1;\delta)}$, la función toma valores mayores que *M*; o sea:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall \ M>0, \exists \delta_{(M)}>0 \ / \ \forall x:\left(x\in Df \ \wedge 0<|x-1|<\delta \Rightarrow f(x)>M\right)$$



b).- Sea: $f(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$. El valor funcional de $f(x)$ no está definido para $x = 1$. Se desprende del gráfico que para cualquier número $M > 0$ prefijado arbitrariamente y tan grande como se quiera, se puede determinar un número $\delta > 0$ / $\forall\ x \in E'_{(1;\delta)}$, la función $f(x)$ toma valores menores que - M; o sea:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall\ M > 0, \exists\delta_{(M)} > 0 \ /\ \forall x : (x \in Df \wedge 0 < |x-1| < \delta \Rightarrow f(x) < -M)$$

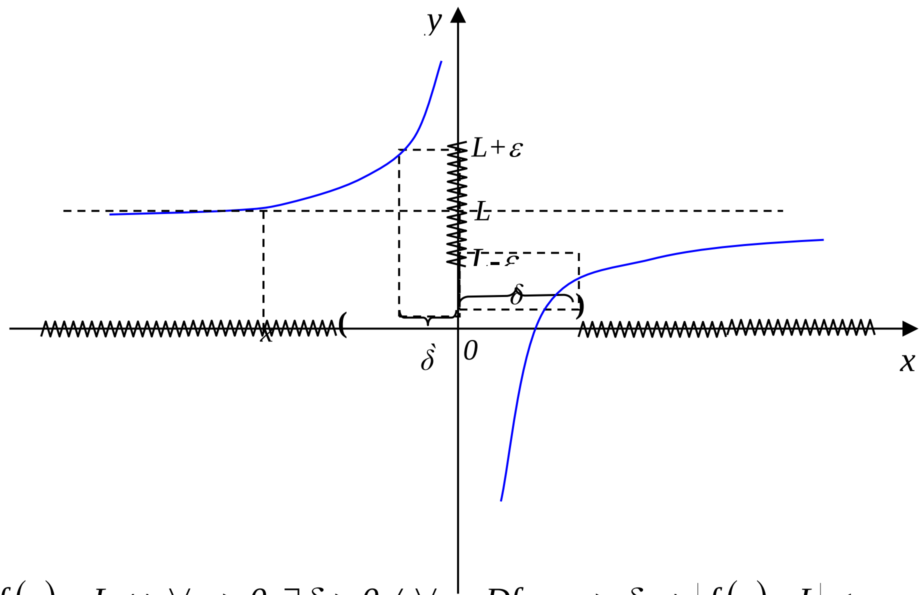


<u>Generalización del concepto de límite</u>: A fin de generalizar el concepto de límite, debemos considerar una "definición" de límite para cada uno de los siguientes casos:

<u>Primer caso</u>: Límite finito para $x \to \pm\infty$:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \ /\ \forall x \in Df \wedge |x| > \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

La recta de ecuación $y=L$ es <u>Asíntota Horizontal</u> del gráfico de la función.



(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \ /\ \forall x \in Df \wedge x > \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

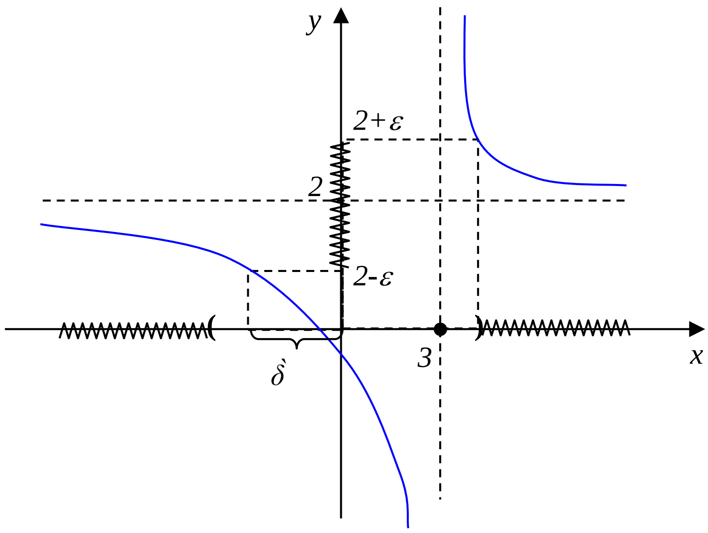
(c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \;/\; \forall x \in Df \wedge x < -\delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Luego, de acuerdo al gráfico, se verifica: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$.

También: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$

<u>Ejemplo</u>: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+1}{x-3} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}} = 2$

Además, se verifica: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+1}{x-3} = 2 \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x+1}{x-3} = 2$

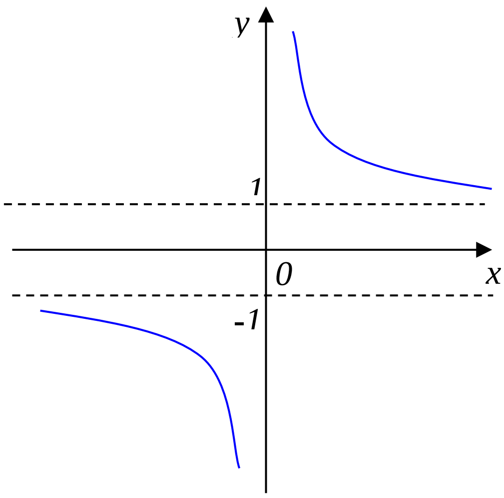


Sea: $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}-1}$, para calcular $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ dividimos numerador y denominador por $\sqrt{x^2} = |x|$; como $|x|$ depende del signo del número x, debemos calcular en forma separada:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

(1) cuando $x > 0$, resulta: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{x}{|x|}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{|x|}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{|x|}} = 1$

(2) cuando $x < 0$, resulta: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\frac{x}{|x|}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{|x|}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + \frac{1}{|x|}} = -1$

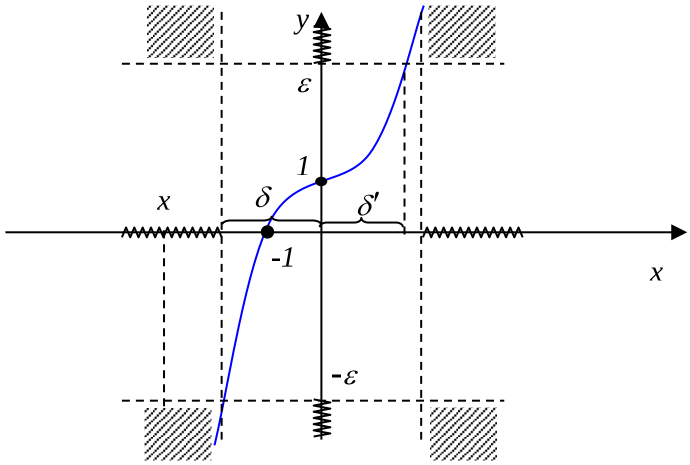


Segundo caso: límite infinito para $x \to \pm\infty$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0 \;/\; \forall x \in Df \wedge |x| > \delta \Rightarrow |f(x)| > M$$

Ejemplo: sea: $y = x^3 + 1$

Del gráfico se desprende: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+1) = +\infty \;\wedge\; \lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+1) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}(x^3+1) = \infty$



***Infinitos*. *Comparación de infinitos*:**

Se dice que una función $f(x)$ es un infinito para $x \to x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$

En forma análoga que en el caso de los infinitésimos podemos, aplicando definición y teoremas, demostrar las siguiente Propiedades de los infinitos:

(a) La suma de dos infinitos de igual signo es un infinito.

(b) El producto de un infinito por un infinito cuyo valor absoluto está acotado inferiormente en un $E_{(x_0)}$ considerado, es un infinito.

(c) El producto de dos infinitos es un infinito.

(d) El cociente entre un infinito y una función acotada en un $E_{(x_0)}$ es un infinito.

En cuanto al cociente de dos infinitos nada podemos afirmar, puesto que encontraremos la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$, a pesar de la cual, salvada la indeterminación, el "verdadero valor" del límite del cociente nos permite efectuar la Comparación de infinitos.

En general si $f(x)$ y $g(x)$ son infinitos para $x \to x_0$ y sí: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty \Rightarrow$ $f(x)$ es un infinito de orden superior a $g(x)$

Sí: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Rightarrow$ $f(x)$ es un infinito de orden inferior a $g(x)$

Sí: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0 \Rightarrow$ $f(x)$ y $g(x)$ son infinitos del mismo orden

Y sí además: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Rightarrow$ $f(x)$ y $g(x)$ son infinitos equivalentes

Indeterminaciones del límite

Cuando estudiamos infinitésimos y ahora infinitos, ambas denominaciones valen para el caso $x \to \infty$.
El cociente de dos infinitésimos o de dos infinitos pueden tener cualquier límite finito o infinito, según las funciones elegidas. Se dice, por ello, que el cociente de dos infinitos o de dos infinitésimos son casos de indeterminación del límite.

Casos de indeterminaciones del límite

(1) Cociente de dos infinitésimos$\left(\frac{0}{0}\right)$.
(2) Cociente de dos infinitos $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$
(3) Producto de un infinitésimo por un finito $(0.\infty)$

(4) Suma de dos infinitos de distinto signo $(\infty - \infty)$

(5) $f(x)^{g(x)}$; sí: $f(x) \to 1 \quad \wedge \quad g(x) \to \infty \quad (1^{\infty})$

(6) $f(x)^{g(x)}$; sí: $f(x) \to 0 \quad \wedge \quad g(x) \to 0 \quad (0^{0})$

(7) $f(x)^{g(x)}$; sí: $f(x) \to \infty \quad \wedge \quad g(x) \to 0 \quad (\infty^{0})$

Ejemplos:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-2x+6}{3x^3-x+3}=\dfrac{5}{3}$; (2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^2+x-2}=1$; (3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4x+4}=\infty$;

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{3x}=e^{15} \quad\to\quad e=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{t}=\lim\limits_{t\to\infty}(1+t)^{1/t}$

Asíntotas a curvas planas:

Ya hemos considerado anteriormente, al aproximar el gráfico de funciones racionales, la idea de asíntota.

Veamos ahora, usando límite.

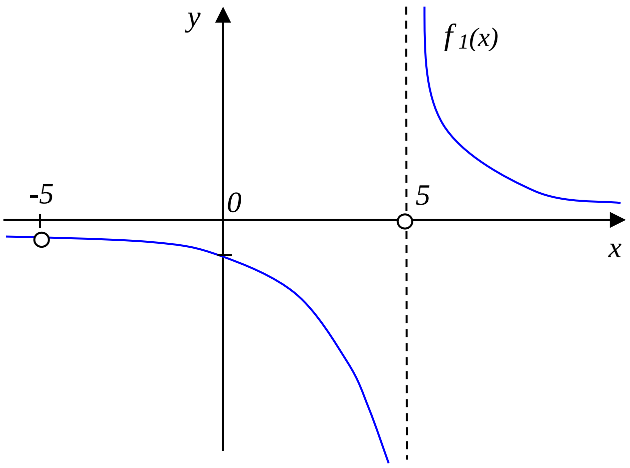
(a) *Asíntota Vertical*:

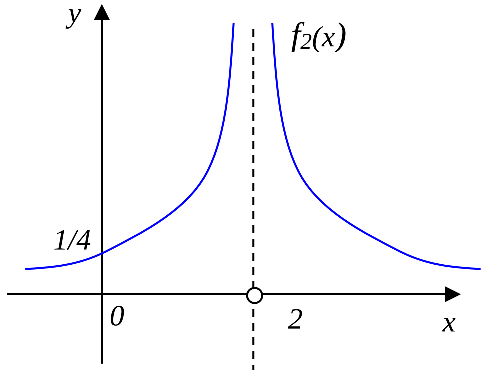
Definición: La recta de ecuación: $x=a$ es Asíntota Vertical del gráfico de la función $f(x)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$

Ejemplos:

(1) Sea: $f_1(x)=\frac{x+5}{x^2-25}$; $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x+5}{x^2-25}=\infty \Rightarrow x=5$ es Asíntota Vertical del gráfico de $f_1(x)$.

(2) Sea: $f_2(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{(x-2)^2}=\infty \Rightarrow x=2$ es Asíntota Vertical del gráfico de $f_2(x)$.





(b) *Asíntota Horizontal*:

Definición: La recta de ecuación: $y=l$ es Asíntota Horizontal del gráfico de la función $f(x)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=l$

Ejemplo:

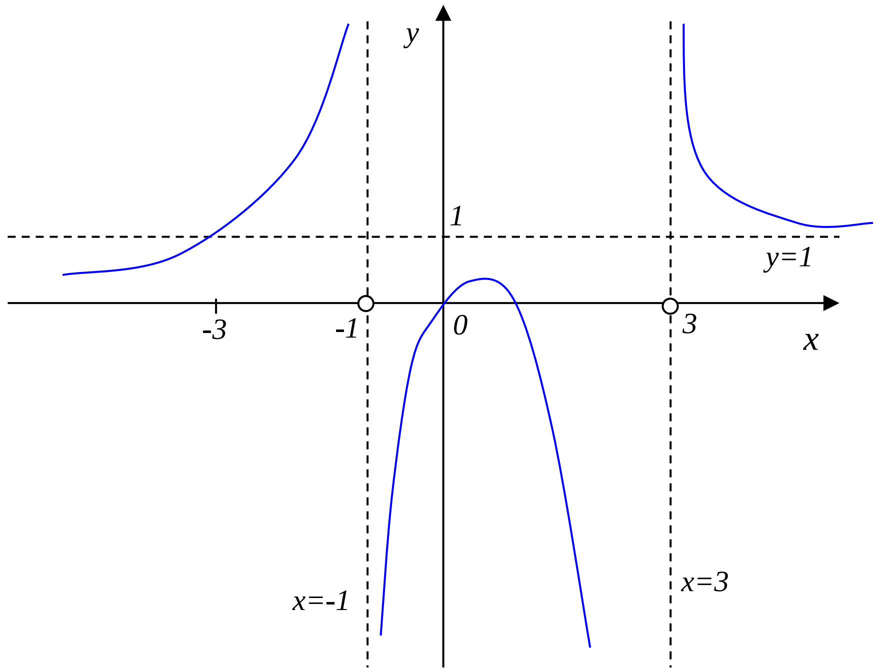
Sea: $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-2x-3}$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1 \Rightarrow y=1$ es Asíntota Horizontal del gráfico de $f(x)$.

Además: $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \infty \Rightarrow x = -1$ <u>Asíntota Vertical</u>

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \infty \Rightarrow x = 3$ <u>Asíntota Vertical</u>

Obsérvese que el gráfico de la función $f(x)$ corta a la Asíntota Horizontal en el punto$(-3;1)$. Luego, <u>el gráfico de una función puede cortar a una Asíntota Horizontal u Oblicua en n puntos</u>.

Por ejemplo: la función $f(x) = 2^{-x}\, sen$ x, admite como Asíntota Horizontal al eje x, y la corta n veces para cualquier n$\in \mathbb{N}$.



(b) *<u>Asíntota Oblicua</u>*:

<u>Definición</u>: la recta de ecuación: $y = px + q \quad (p \neq 0)$ es <u>Asíntota Oblicua</u> del gráfico de la función $f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - (px + q)] = 0$

O bien: $p = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \wedge \quad q = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - px)$

En la primera definición, se verifica: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty \quad \wedge \quad f(x) = px + q + g(x)$; donde $g(x)$ es un infinitésimo para$x \to \infty$.

Asíntotas de este tipo aparecen en funciones racionales fraccionarias, donde el grado del numerador es mayor en una unidad que el grado del denominador. En efecto, si la función racional fraccionaria considerada es el cociente de la función polinómica $f(x)$, donde el grado $(f) = n \geq 2$ sobre la función polinómica h, de grado$(h) = n - 1$, al efectuar dicho cociente, resulta: $\frac{f(x)}{h(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{h(x)}$, donde s es un polinomio de primer grado y r es un polinomio de grado menor que gr (h), según se verá en un ejemplo.

Luego, $\frac{r}{h}$ es infinitésimo para $x \to \infty$ y s es una función lineal, cuyo gráfico es Asíntota Oblicua al gráfico de la función racional fraccionaria $\frac{f(x)}{h(x)}$.

Ejemplo: $f(x) = \frac{x^2+2x}{x-2}$

Veamos si tiene Asíntota Vertical:

$\lim_{x\to 2} = \frac{x^2+2x}{x-2} = \frac{8}{0} = \infty$ $\Rightarrow$ la recta de ecuación $x = 2$ es **Asíntota Vertical**

Asíntota Horizontal:

$\lim_{x\to\infty} = \frac{x^2+2x}{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} = \frac{1}{0} = \infty$ $\Rightarrow$ $\nexists$ **Asíntota Horizontal**

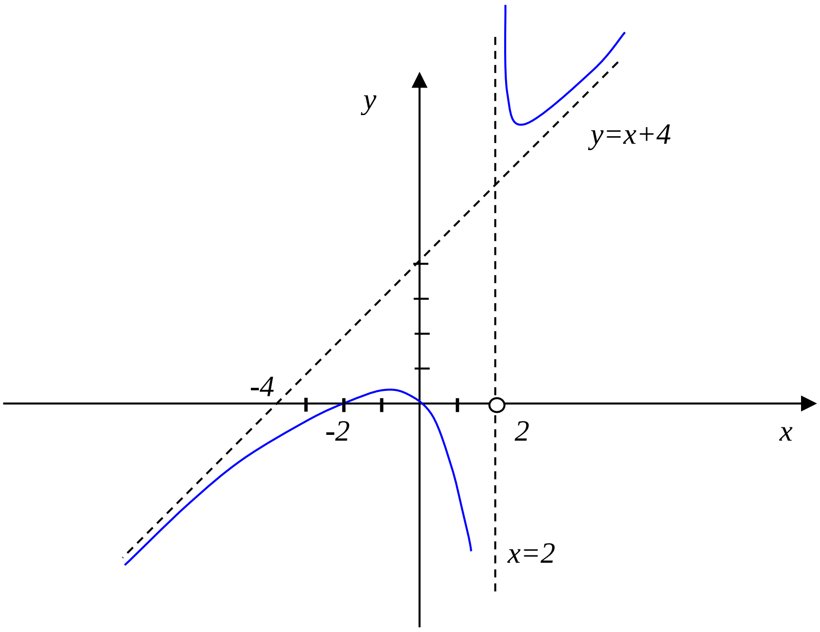
Asíntota Oblicua:

$$p = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+2x}{x-2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x}{x^2-2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{2}{x}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{p = 1}$$

$$q = \lim_{x\to\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x}{x-2} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-x^2+2x}{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{x-2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4}{1-\frac{2}{x}} = 4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{q = 4}$$

Luego, la Asíntota Oblicua es: $\boxed{y = px + q = x + 4}$



Funciones Continuas

Función continua en un punto

Definición: sea $f(x)$ función y a un punto de acumulación del Df; $f(x)$ es continua en a, si y solo si, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Sí a no es punto de acumulación del Dominio, se conviene en considerar que en a $f(x)$ es continua si existe $f(a)$. Como la continuidad se basa en el concepto de límite, puede darse también la definición utilizando entornos convenientes de a y $f(a)$:

$$f(x) \text{ es continua en } a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \;/\; \forall\, x: \left(x \in Df \;\wedge\; \underbrace{|x-a| < \delta}_{E_{(a;\delta)}} \Rightarrow \underbrace{|f(x) - f(a)| < \varepsilon}_{E_{(f(a);\varepsilon)}} \right)$$

(pués $f(x)$ está definida en a, y en dicho punto se verifica: $\forall\, \varepsilon > 0$: $f(a) - f(a) = 0 < \varepsilon$).

En el caso de una función continua, los símbolos de función y de límite pueden conmutarse:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f\left(\lim_{x\to a} x\right)$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que si una función es continua en a, los límites laterales son iguales:

$$f(x) \text{ es continua} \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$$

Sí la continuidad se verifica solamente en el $E_{(a^+;\varepsilon)} \Rightarrow f(x)$, <u>continua por la derecha:</u> o sea:

$$f(x) \text{ es continua por la derecha} \Leftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

Sí la continuidad se verifica solamente en el $E_{(a^-;\varepsilon)} \Rightarrow f(x)$, <u>continua por la izquierda:</u> o sea:

$$f(x) \text{ es continua por la izquierda} \Leftrightarrow \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

Continuidad en un intervalo

Se dice que una función $f(x)$ es continua en un $[a;b]$ si es continua en cada punto interior del $[a;b]$, y además es continua a derecha en el extremo a, y es continua a izquierda en el extremo b: $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \wedge \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$

Es continua en $(a;b)$ si $f(x)$ es continua en todos los puntos del intervalo, menos en sus extremos a y b.

Discontinuidades

Si no se verifica la definición de continuidad en un punto, la función considerada es discontinua en ese punto.

Una función puede ser discontinua en $x = a$, por que $\nexists$ f(a), o porque $\nexists \lim\limits_{x \to a^{\pm}} f(x)$, o porque ambos existen pero son distintos.

Según sea la condición o condiciones de continuidad que no se cumplan, se presentan distintos tipos o casos de discontinuidad que dividiremos en Discontinuidades Finitas y Discontinuidades Infinitas, según que los límites de la función en el punto sean finitos, o que exista por lo menos uno que sea infinito.

Discontinuidades Finitas

Se dividen en dos casos: de 1^{era} especie y de 2da especie. Según, que existan los límites laterales o falte alguno.

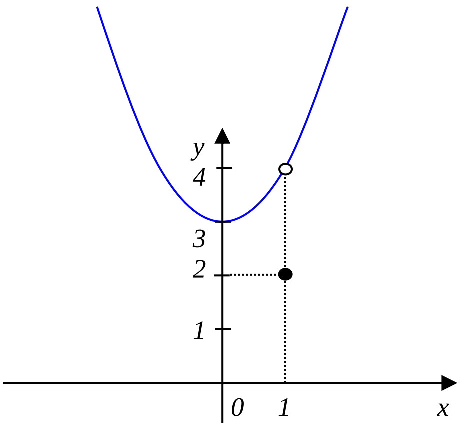
A) Discontinuidades finitas de 1^{era} especie: existen los límites laterales. Se presentan dos casos:

CASO 1: (a) $\lim\limits_{x \to a^{\pm}} f(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) = L$; pero: $f(a) \neq \lim\limits_{x \to a} f(x)$

En este caso, la función presenta una discontinuidad en $x = a$ (definiéndose a $x = a$ como punto aislado), puesto que el valor de la función $f(a)$, es distinto a los límites laterales.

Ejemplo: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 \ ; \text{ si x} \neq 1 \\ \quad 2 \ ; \text{ si x} = 1 \end{cases}$

$f(1) = 2 \neq \lim\limits_{x \to 1^{\pm}} f(x) = 4$



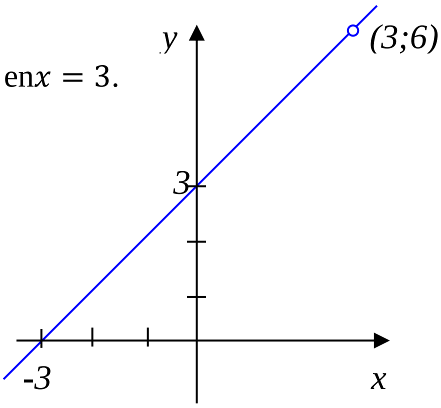
Discontinuidad de 1^{era} especie en $x = 1$

(b) Cuando $f(x)$ no está definida en $x = a$, pero sí: $\exists \lim\limits_{x \to a^{\pm}} f(x)$. En este caso particular, como la función no está definida en $x = a$, pero existe el límite finito en dicho punto, se dice que la función presenta en $x = a$ una Discontinuidad evitable.

Ejemplo: Sea: $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$; estudiar la continuidad de $f(x)$ en $x = 3$.

(1)- $\nexists$ f(3)

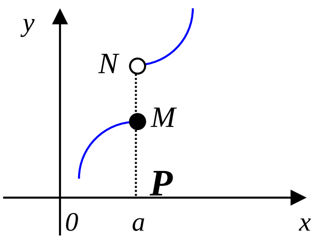
(2)- $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3} x + 3 = 6$



redefiniendo: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} \ ; \ \text{si } x \neq 3 \\ 6 \ ; \ \text{si } x = 3 \end{cases}$ $\Rightarrow$ <u>$f(x)$ es continua</u>. $\therefore$ $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ tiene una <u>Discontinuidad evitable</u>, pues basta tomar como valor de la función en el punto considerado <u>el valor de su límite</u> para que desaparezca la discontinuidad.

CASO 2: es el caso en que los límites laterales son distintos: $\lim_{x \to a^+} f(x) \neq \lim_{x \to a^-} f(x)$

Según la gráfica: $\begin{cases} \lim_{x \to a^-} f(x) = \overline{PM} \\ \lim_{x \to a^+} f(x) = \overline{PN} \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$



A esta forma de discontinuidad se la llama <u>salto finito</u>; pudiéndose presentar distintos <u>casos particulares</u>, según sea el valor de la función en el punto.

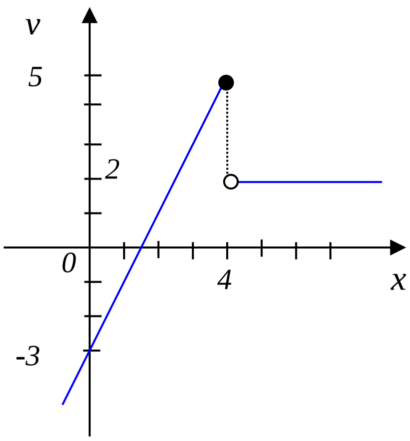
(a) Sí: $f(a) = \lim_{x \to a^-} f(x) \Rightarrow$ <u>la función será continua a izquierda y discontinua a derecha de $x=a$</u>.

<u>Ejemplo</u>: Sea: $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 \ ; \ si \ x \leq 4 \\ 2 \ ; \ si \ x > 4 \end{cases}$; Estudiaremos las condiciones de continuidad en $x = 4$.

(1)- $f(4) = 5$

(2)- $\nexists \lim_{x \to 4} f(x)$; pues: $\lim_{x \to 4^+} 2 = 2 \ \wedge \ \lim_{x \to 4^-} 2x - 3 = 5$

como: $f(4) = \lim_{x \to 4^-} f(x) \Rightarrow f(x)$ es continua a izquierda y discontinua a derecha de $x = 4$, presentando además un salto de "discontinuidad finito".



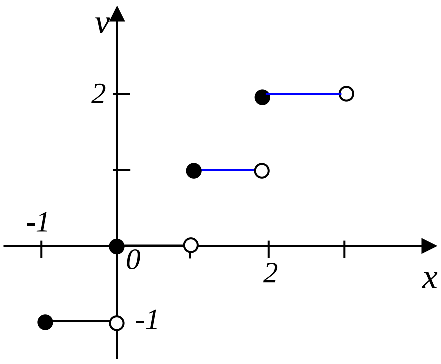
(b) Sí: $f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x) \Rightarrow$ <u>la función será continua a derecha y discontinua a izquierda de $x = a$</u>.

Ejemplo: Sea: $f(x) = [x]$. Estudiaremos las condiciones de continuidad en $x = 2$.

(1)- $f(2) = 2$

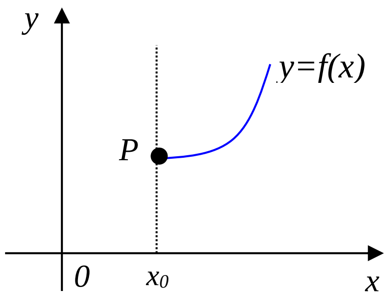
(2)- $\nexists \lim_{x\to 2} f(x)$; pues: $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2 \wedge \lim_{x\to 2^-} f(x) = 1$

$\therefore f(2) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = 2 \Rightarrow f(x) = [x]$, es continua a derecha y discontinua a izquierda del $x = 2$, presentando, además, un salto de "discontinuidad finito".

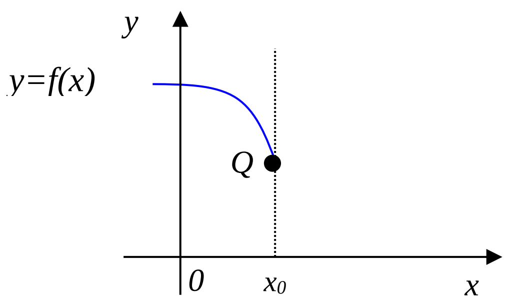


B). Discontinuidades finitas de 2da especie: cuando falta alguno de los límites laterales.

(a) Que falte el límite izquierdo. En este caso la discontinuidad a izquierda es esencial o inevitable, puesto que como se puede observar, la curva se detiene en el punto P.



(b) Que falte el límite derecho. En este caso la discontinuidad a derecha es esencial o inevitable, puesto que como se puede observar, la curva se detiene en el punto Q.



(c) Por último, puede presentarse el caso en que los límites laterales no existan, tal como sucede en la función: $f(x) = sen\frac{\pi}{x}$. Por lo que la discontinuidad será esencial o inevitable.

Discontinuidades infinitas

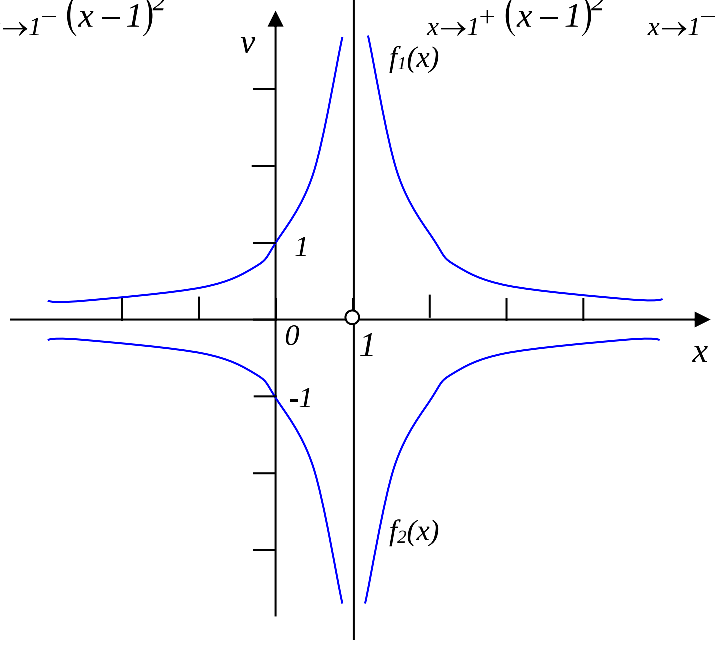
A) Discontinuidades infinitas 1era especie: existen los límites laterales

(a) Puede suceder que los límites laterales a izquierda y derecha sean simultáneamente iguales a ∞, positivo o negativo; es decir, que se verifica separadamente alguna de las siguientes condiciones:

$$(1)\quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty \qquad ; \qquad (2)\quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$$

Ejemplo: $f_1(x) = \frac{1}{(x-1)^2} \quad \wedge \quad f_2(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty \qquad ; \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{-1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-1}{(x-1)^2} = -\infty$$

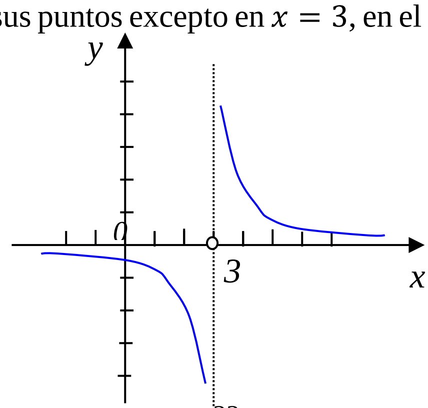


(b) Sea ahora el caso de una función $f(x)$ cuyos límites laterales sean también infinitos, pero de signo contrario, es decir: $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$

Como existen siempre los dos límites, este también es un caso de Discontinuidad infinita de *1era* especie.

Ejemplo: Sea: $f(x) = \frac{1}{x-3}$; $\lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty$; $\lim_{x\to 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty$

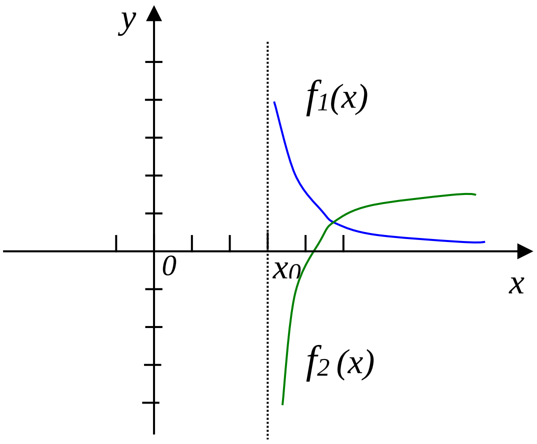
Esta función es continua en todos sus puntos excepto en $x = 3$, en el presente una discontinuidad infinita.



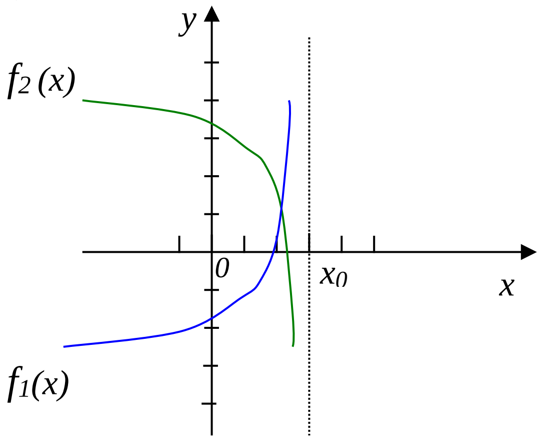
En los casos vistos precedentemente se dice que las funciones presentan en los puntos considerados " un salto infinito de discontinuidad".

B) Discontinuidades infinitas de 2da especie: cuando falta alguno de los límites laterales.

(a) Sea *f(x)* una función cuyo límite izquierdo no existe, siendo además, su límite derecho infinito, es decir: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$, *f(x)* puede tomar alguna de las dos formas de la figura.



(b) Puede ocurrir que dada una función *f(x)*, falte el límite derecho, y que el límite izquierdo sea infinito; o sea: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$. En este caso la gráfica de la función tomará alguna de las formas de la figura.



Álgebra de funciones Continuas

Las funciones continuas tienen una serie de propiedades, algunas de las cuales son consecuencia de los Teoremas sobre límites, en base a los cuales, si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones continuas en el $[a;b]$, puede demostrarse que:

(1)- La suma de dos funciones continuas en $[a;b]$ es una función continua en dicho intervalo. $h(x) = f(x) + g(x)$; como $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas:

$\forall\, x_0 \in [a;b]: \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \;\wedge\; \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$; y por límite de una suma:

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0) = h(x_0)$$

(2)- El producto de dos funciones continuas en $[a;b]$ es una función continua en dicho intervalo.

(3)- El cociente de dos funciones continuas en $[a;b]$ es una función continua en dicho intervalo.

Continuidad de la función Compuesta

Sea: $y = f(u)$; $\mathrm{u} = g(x)$; $\mathrm{f}[g(x)]$ $\Leftrightarrow$ Imagen g $\subseteq$ Dominio f

Sí g es continua en el punto x_0 y$f(u)$ es continua en $g(x_0)$ $\Rightarrow$ $h(x) = f \circ g(x) = f[g(x)]$es continua en$x_0$.

Extremos de funciones

Extremos Absolutos o Globales

Sea$f(x)$, una función definida en un conjunto A $\subseteq \mathbb{R}$

Máximo Absoluto:

El valor de $f(c_1)$ es el máximo absoluto de $f(x)$ sí $A \subseteq$ Df $\Leftrightarrow$ $\mathrm{f}(c_1)$ no es superado por ninguno de los valores $f(x)$ que alcanza la función en el conjunto A. Es decir:

$$f(c_1) \text{ \underline{máximo absoluto} de } f(x) \text{ en A } \Leftrightarrow \mathrm{f}(x) \leq f(c_1);\ \forall x \in \mathrm{A}$$

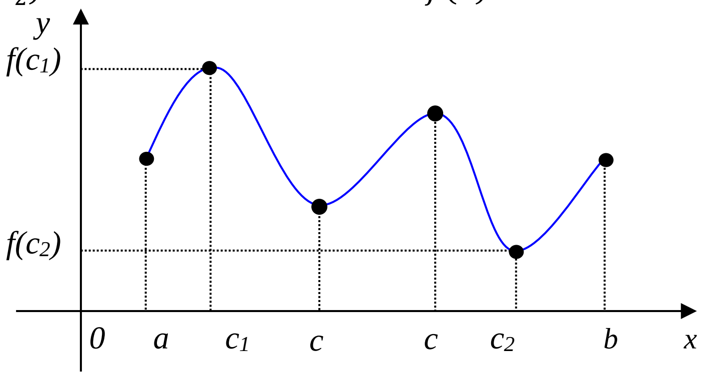
El conjunto A puede ser el Dominio de $f(x)$ o puede ser un subconjuto del Dominio de$f(x)$. En general, el valor $f(c_1)$ es el máximo absoluto de $f(x)$ sí se cumple la definición anterior con A=Df. O sea: $f(c_1)$ es el máximo absoluto de $f(x)$ $\Leftrightarrow$ $f(c_1)$ es el máximo del recorrido de$f(x)$.

Mínimo absoluto:

El valor de $f(c_2)$ es el mínimo absoluto de $f(x)$ *si* $A \subseteq Df$ $\Leftrightarrow$ $f(c_2)$ no supera a ninguno de los valores $f(x)$ que alcanza la función en el conjunto A. Es decir:

$$f(c_2) \text{ \underline{mínimo absoluto} de } f(x) \text{ en A } \Leftrightarrow f(x) \geq f(c_2);\ \forall x \in \mathrm{A}$$

El valor $f(c_2)$ es el mínimo absoluto de $f(x)$ sí se cumple la definición anterior con A=Df. O sea: $f(c_2)$ es el mínimo absoluto de $f(x)$ $\Leftrightarrow$ $f(c_2)$ es el mínimo del recorrido de$f(x)$.



$f(c_1)$ Máximo Absoluto

$f(c_2)$ Mínimo Absoluto

Extremos Relativos o Locales

Máximo relativo:

Sea$f(x)$, función con dominio D, y sea c_1, un punto interior a dicho dominio.

El valor $f(c_1)$ es un máximo local o máximo relativo de $f(x)$ $\Leftrightarrow$ existe un $E_{(c_1)}$ tal que los valores que toma $f(x)$ en los puntos de dicho entorno no superan el valor$f(c_1)$. Es decir:

$$f(c_1) \text{ \underline{máximo relativo} } \Leftrightarrow \exists\, \mathrm{E}_{(c_1)} \subseteq \mathrm{Df} / \forall \mathrm{x} \in \mathrm{E}_{(c_1;\delta)} \Rightarrow \mathrm{f}(x) \leq f(c_1)$$

Mínimo relativo: Sea c_2 un punto interior de dominio de la función.

El valor $f(c_2)$ es un <u>mínimo local o mínimo relativo</u> de $f(x)$ $\Leftrightarrow$ existe un $E_{(c_2)}$ en el cual se verifica que el valor $f(c_2)$ no supera a ninguno de los valores que toma *f(x)* en los puntos de dicho entorno. Es decir:

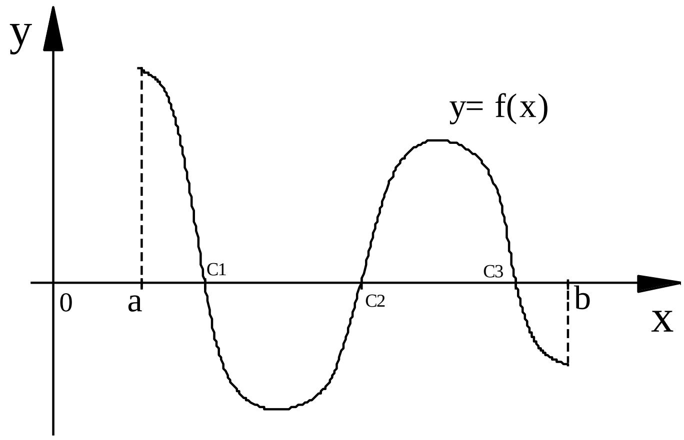
$$f(c_2)\ \underline{\text{mínimo relativo}}\ \Leftrightarrow \exists\, E_{(c_2)} \subseteq Df \,/\, \forall\, x \in E_{(c_2;\delta)} \Rightarrow f(x) \geq f(c_2)$$

En el gráfico anterior:

$f(c_1)$ y $f(c_4)$ Máximos Relativos $\qquad$ $f(c_2)$ y $f(c_3)$ Mínimos Relativos

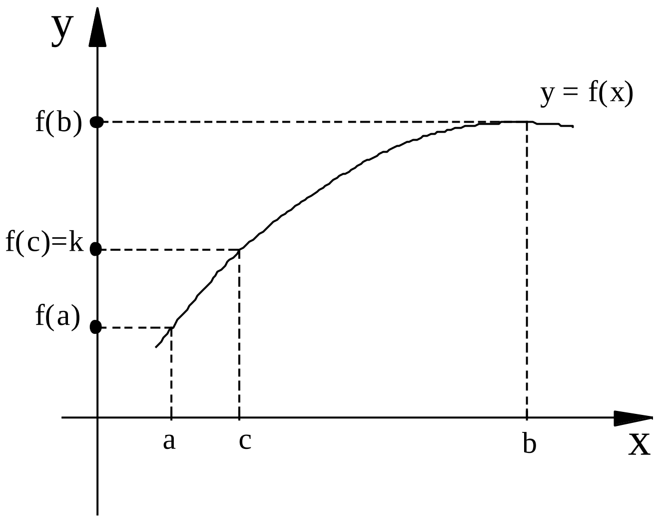
<u>Teorema de Bolzano o de los Ceros de las Funciones Continuas</u>

Si f(x) es una función continua en un intervalo $[a;b]$ y $f(a).f(b) < 0$, entonces $\exists\ c \in (a\,;b) \,/\, f(c) = 0$



<u>Teorema del Valor Intermedio</u>

Si f(x) es una función continua en un intervalo $[a;b]$ y $f(a) < k < (b)$, entonces $\exists\ c \in (a\,;b) \,/\, f(c) = k$



<u>Teoremas deWeierstrass</u>

<u>Primer Teorema</u>**:** Si f(x) es una función continua en un intervalo $[a;b]$, entonces f(x) está acotada en $[a;b]$.

<u>Segundo Teorema</u>**:** Si f(x) es una función continua en un intervalo $[a;b]$, entonces f(x) alcanza en $[a;b]$, Máximo y Mínimo Absolutos.

ANEXO

Teoremas sobre límites:

A continuación, encontrarás las demostraciones de los Teoremas sobre límites de funciones para $x \to a$.

a).- El **límite del producto de una constante k, por una función $f(x)$**, es igual al producto de la constante por el límite L de la función, o sea:

$$\lim_{x\to a}[k \,.\, f(x)] = k.\lim_{x\to a} f(x) = k \,.\, L$$

Demostración:
$|f(x) - L| < \varepsilon \Leftrightarrow |k \,.\, f(x) - k \,.\, L| < \varepsilon \Leftrightarrow |k \,.\, (f(x) - L)| < \varepsilon \Leftrightarrow |k||f(x) - L| < \varepsilon \Leftrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon/|k|$

para $0 < |x - a| < \delta$; O sea, por definición de límite: $\lim_{x\to a} f(x).k = k \,.\, L$

b).- El **límite de una suma de funciones**, es igual a la suma de los límites de las funciones dadas, siempre y cuando los límites existan: $\lim_{x\to a}(f_1(x) + f_2(x)) = \lim_{x\to a} f_1(x) + \lim_{x\to a} f_2(x) = L_1 + L_2 \Leftrightarrow$

Hipótesis:
$\lim_{x\to a} f_1(x) = L_1 \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon' > 0, \exists\, \delta'(\varepsilon') > 0 \,/\, \forall\, x: (x \in Df_1 \;\wedge\; 0 < |x - a| < \delta') \Rightarrow |f_1(x) - L_1| < \varepsilon'$

$\lim_{x\to a} f_2(x) = L_2 \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon'' > 0, \exists\, \delta''(\varepsilon'') > 0 \,/\, \forall\, x: (x \in Df_2 \;\wedge\; 0 < |x - a| < \delta'') \Rightarrow |f_2(x) - L_1| < \varepsilon''$

Tesis:

$$\lim_{x\to a}(f_1(x) + f_2(x)) = \lim_{x\to a} f_1(x) + \lim_{x\to a} f_2(x) = L_1 + L_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\,, \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \,/\, \forall x: \big(x \in D_{f_1 \cap f_2} \;\wedge\; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \big|\big(f_1(x) + f_2(x)\big) - (L_1 + L_2)\big|\big) < \varepsilon$$

Demostración: por hipótesis: $\lim_{x\to a} f_1(x) = L_1 \;\wedge\; \lim_{x\to a} f_2(x) = L_2$

Tomando $\delta =$ mínimo $\{\delta_1;\ \delta_2\}$;

$$\big|\big(f_1(x) + f_2(x)\big) - (L_1 + L_2\big| \underset{\substack{\uparrow \\ asociamos}}{=} |(f_1(x) - L_1) + (f_2(x) - L_2)| \underset{\substack{\uparrow \\ por\ desigualdad \\ triangular}}{\leq}$$

$$\leq \underbrace{\Big|\underbrace{f_1(x) - L_1}_{<\varepsilon'}\Big| + \Big|\underbrace{f_2(x) - L_2}_{<\varepsilon''}\Big|}_{por\ hipótesis} \leq \varepsilon' + \varepsilon'' = \varepsilon \Rightarrow \big|\big(f_1(x) + f_2(x)\big) - (L_1 + L_2)\big| < \varepsilon$$

Luego: $[f_1(x) + f_2(x)] \underset{x\to a}{\to} (L_1 + L_2)$

c).- En forma análoga se demuestra que el **límite de la diferencia de funciones, es igual a la diferencia de los límites** de las funciones dadas, siempre y cuando los límites existan.

d).- El **límite del producto de funciones es igual al producto de los límites de las funciones** dadas, siempre y cuando los límites existan.

Límite de un producto de dos funciones

Hipótesis:

$$\lim_{x\to x_0} f_1(x)=L_1 \Leftrightarrow \forall\varepsilon_1>0, \exists\delta_1(\varepsilon_1)>0 \;/\; \forall x\in Df_1 \wedge 0<|x-x_0|<\delta_1 \Rightarrow |f_1(x)-L_1|<\varepsilon_1 \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to x_0} f_2(x)=L_2 \Leftrightarrow \forall\varepsilon_2>0, \exists\delta_2(\varepsilon_2)>0 \;/\; \forall x\in Df_2 \wedge 0<|x-x_0|<\delta_2 \Rightarrow |f_2(x)-L_2|<\varepsilon_2 \qquad (2)$$

Tesis:

$$\lim_{x\to x_0}\left(f_1(x).f_2(x)\right)=\lim_{x\to x_0} f_1(x).\lim_{x\to x_0} f_2(x)=L_1.L_2 \Leftrightarrow \forall\varepsilon'>0, \exists\delta(\varepsilon')>0/\forall x\in D(f_1\cap f_2):$$

$$0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |(f_1(x).f_2(x)-(L_1L_2)|<\varepsilon'$$

Demostración: Sin emplear valor absoluto hacemos el siguiente producto:

$$(f_1(x)-L_1).(f_2(x)-L_2)=f_1(x).f_2(x)-\underbrace{f_1(x).L_2-f_2(x).L_1}_{al\ 1^{er}\ miembro}+L_1.L_2$$

$(f_1(x)-L_1).(f_2(x)-L_2)+f_1(x).L_2+f_2(x).L_1=f_1(x).f_2(x)+L_1.L_2;$
invirtiendo la igualdad obtenemos:

$$f_1(x).f_2(x)+L_1.L_2=(f_1(x)-L_1).(f_2(x)-L_2)+f_1(x).L_2+f_2(x).L_1$$

$-2.L_1.L_2=-2.L_1.L_2$ sumamos a ambos miembros el valor $-2\,L_1.L_2$

$$f_1(x).f_2(x)-L_1.L_2=(f_1(x)-L_1).(f_2(x)-L_2)+f_1(x).L_2+f_2(x).L_1-2.L_1.L_2$$

descomponemos: $-2.L_1.L_2=-L_1.L_2-L_1.L_2$, y luego factoreamos el segundo miembro con el segundo caso de factoreo:

$$f_1(x).f_2(x)-L_1.L_2=(f_1(x)-L_1).(f_2(x)-L_2)+f_1(x).L_2+f_2(x).L_1-L_1.L_2-L_1.L_2=$$

$$=(f_1(x)-L_1).(f_2(x)-L_2)+L_2.(f_1(x)-L_1)+L_1.(f_2(x)-L_2)$$

aplicando valor absoluto:

$$|f_1(x).f_2(x)-L_1.L_2| = |(f_1(x)-L_1).(f_2(x)-L_2)+L_2.(f_1(x)-L_1)+L_1.(f_2(x)-L_2)| \underset{\text{Por Prop. del Valor Absoluto}}{\leq}$$

$$\leq \underbrace{|(f_1(x)-L_1)|}_{<\varepsilon_1 \text{ por } (1)} . \underbrace{|(f_2(x)-L_2)|}_{<\varepsilon_2 \text{ por } (2)} + |L_2|\underbrace{|(f_1(x)-L_1)|}_{<\varepsilon_1} + |L_1| . \underbrace{|(f_2(x)-L_2)|}_{<\varepsilon_2}$$

$$<\varepsilon_1.\varepsilon_1+|L_2|.\varepsilon_1+|L_1|.\varepsilon_2<\varepsilon'$$

Luego: $|f_1(x).f_2(x)-L_1.L_2|<\varepsilon'$, si además: $\delta: mínimo \quad \{\delta_1;\delta_2\}$, cuando:

$$x\in D\left(f_1(x)\cap f_2(x)\right)\wedge 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow \lim_{x\to x_0}[f_1(x).\ f_2(x)]=\lim_{x\to x_0} f_1(x).\lim_{x\to x_0} f_2(x)=L_1.L_2$$

e).- El **límite de la recíproca de una función es igual a la recíproca del límite**, siempre que dicho límite sea distinto a cero.

<u>Hipótesis</u>:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L \quad (L\neq 0)\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon>0, \exists\, \delta(\varepsilon)>0 \,/\, \forall\, x:\left(\forall\, x\in Df \wedge 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon\right)$$

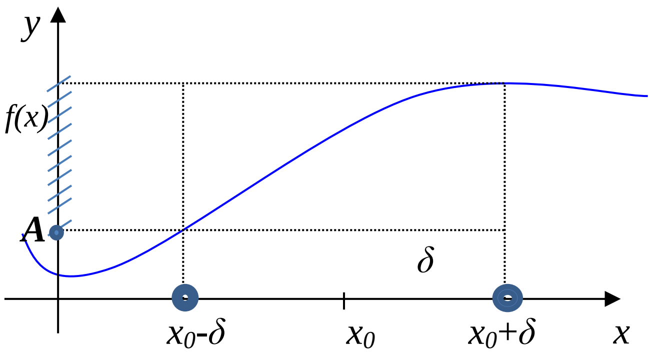
<u>Tesis</u>:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}=\frac{1}{L}\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon'>0, \exists\, \delta'(\varepsilon')>0 \,/\, \forall\, x:\left(x\in Df_{1/f(x)} \wedge 0<|x-x_0|<\delta' \Rightarrow \left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{L}\right|<\varepsilon'\right)$$

<u>Demostración</u>: Sea un número $\varepsilon'>0$; debemos probar que existe un número $\delta>0$ tal que:

$$si\ x\in D\frac{1}{f(x)} \ \wedge\ 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow \left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{L}\right|<\varepsilon'$$

Calculemos cuando vale: $\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{L}\right|=\left|\frac{L-f(x)}{f(x).L}\right|=\frac{|L-f(x)|}{|f(x)|.|L|}=\underbrace{\frac{1}{|f(x)|}}_{\varepsilon''}\frac{|f(x)-L|}{|L|}=\frac{\overbrace{|f(x)-L|}^{<\varepsilon\ por\ hipotesis}}{|f(x)||L|}$ (1)



Sí ***A*** es una cota inferior de la función en el intervalo$(x_0-\delta; x_0+\delta)$, podemos escribir:

$f(x)>A\Rightarrow \frac{1}{f(x)}<\frac{1}{A}\Rightarrow \frac{1}{|f(x)|}<\frac{1}{|A|}\ \Rightarrow\ \frac{1}{|f(x)|}\ <\ \varepsilon''\ >0$;

reemplazando en (1); resulta: $\frac{|f(x)-L|}{|f(x)|.|L|}<\frac{\varepsilon}{|A|.|L|}=\varepsilon'$

Luego, queda demostrado que: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{L}$

f).- El **límite de un cociente de funciones** es igual al cociente de los límites, siempre que el límite del denominador sea distinto de cero.

Sí $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)=L_1 \wedge \lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)=L_2 \wedge L_2\neq 0$,y si x_0 es punto de acumulación del dominio de $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, entonces: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ *existe y es* $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{L_1}{L_2}$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\lim_{x\to x_0}\left[f_1(x).\frac{1}{f_2(x)}\right]=\lim_{x\to x_0} f_1(x).\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f_2(x)}=L_1.\frac{1}{L_2}=\frac{L_1}{L_2}$$

g).- El límite de la opuesta de una función es igual a la opuesta del límite.

h).-<u>Unicidad del Límite</u>: una función no puede tener, para$x\to a$, dos límites distintos.

Una función no puede tener para $x\to x_0$ dos límites distintos.

Sí $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L_1 \wedge \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L_2$ *, entonces :* $L_1=L_2$

Supongamos que la función $f(x)$ tiene para $x \to x_0$ dos límites distintos, o sea: $L_1 \neq L_2$

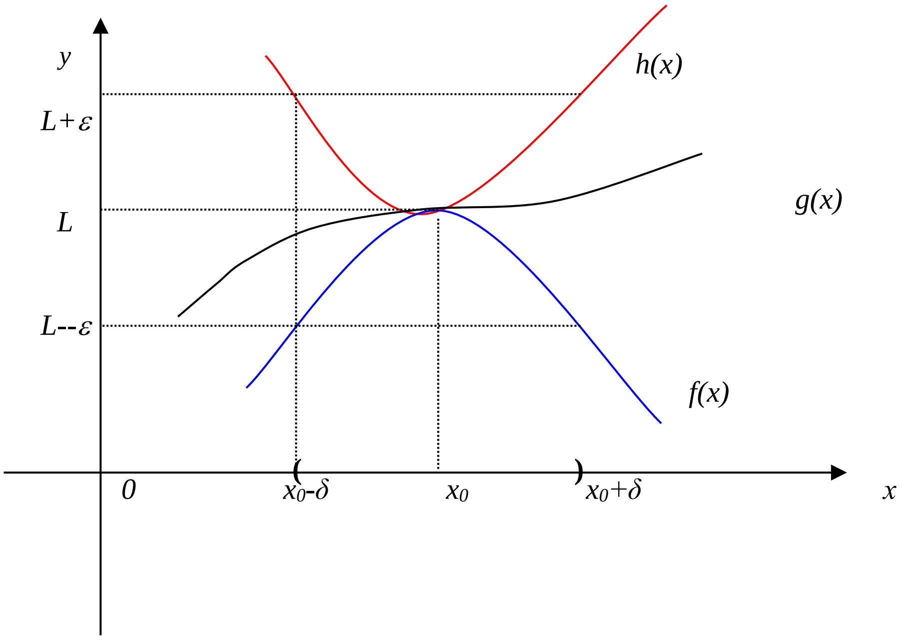
Siendo $\varepsilon > 0$, existen δ_1 y δ_2 tales que: $x \in Df \ \wedge\ 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \varepsilon'$
$x \in Df \ \wedge\ 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L_2| < \varepsilon''$

Ahora bien, cuando x_0 es un punto de acumulación del *Df*, está definida en algún punto $x_1 \neq x_0$ en el intervalo abierto: $(x_0 - \delta_1; x_0 + \delta_1) \cap (x_0 - \delta_2; x_0 + \delta_2)$,
Luego: $|L_1 - L_2| = |L_1 - f(x_1) + f(x_1) - L_2| \leq |L_1 - f(x_1)| + |f(x_1) - L_2| < \varepsilon' + \varepsilon'' = \varepsilon$
Y como sabemos que sí: $|a| \leq \varepsilon,\ \forall \varepsilon > 0 \ \Rightarrow\ a = 0$, resulta: $L_1 = L_2$

i).- Teorema de Confrontación entre límites:

Sí existe un intervalo abierto *A* que contiene a x_0 / $\forall$ x $\neq$ x_0: $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ y sí:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L \Rightarrow \lim_{x \to x_0} g(x) = L$$



ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS INFINITÉSIMOS

(I).- Si una función tiene límite finito, entonces dicha función es igual a su límite más un infinitésimo:

$$f(x) = L + \varepsilon(x);$$

puesto que: $\lim_{x \to a} f(x) = L$, cuando la diferencia: $f(x) - L$ tiene límite cero, o sea, cuando la diferencia es un infinitésimo $\varepsilon_{(x)}$, podemos escribir en un entorno del punto $x = a$:

$$f(x) = L + \varepsilon(x); \quad \varepsilon(x) \underset{x \to a}{\to} 0$$

O bien: ''Si una función tiene límite finito, entonces dicha función es igual a su límite más un infinitésimo''.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \ \Leftrightarrow\ \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta_{(\varepsilon)} > 0 \,/\, \forall\, x: \left(x \in Df \ \wedge\ 0 < |x\text{-}a| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \underset{\varphi(x)}{\varepsilon} \right)$$

Sea la siguiente función: $\varepsilon(x) = \phi(x) = f(x) - L$

$$\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = \lim_{x\to a} \varphi(x) = \lim_{x\to a} [f(x) - L] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} L = L - L = 0 \quad \therefore \quad \varepsilon(x) \underset{x\to a}{\to} 0$$

$\varepsilon(x)$ es un infinitésimo; $\quad f(x) - L = \varepsilon(x) \Rightarrow f\big(x = L + \varepsilon(x)\big)$

(II).- La suma de varios infinitésimos en un mismo punto $x = a$ es otro infinitésimo en el punto a. O bien, la suma de un número finito de infinitésimo para$x \to a$, es otro infinitésimo para$x \to a$.

(III).- El producto de dos infinitésimos en un mismo punto $x = a$, es un infinitésimo en el punto$a$.

(IV).- El producto de un infinitésimo por una constante k cualquiera, es un infinitésimo.

(V).- El cociente de un infinitésimo por una constante, es un infinitésimo.

Cociente de infinitésimos. Órdenes infinitesimales

A diferencia de lo que sucede con la suma resta y producto de infinitésimos, no podemos asegurar nada en general sobre el cociente de infinitésimos.

Ejemplo:

El cociente: $\frac{x^5}{x^3}$; x^5 y x^2 infinitésimos para $x \to 0$; $\quad \frac{x^5}{x^2} = x^3$ infinitésimo para $x \to 0 \quad (1)$

El cociente: $\frac{x^2}{x^5} = \frac{1}{x^3} \underset{x\to 0}{\to} \infty \quad (2)$

El cociente: $\frac{x^2}{2x^2}$; x^2 y $2x^2$ infinitésimos para $x \to 0$: $\frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \quad (3)$

En general, si $f(x)$ y $g(x)$son dos infinitésimos y $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\to} 0$, se dice que $f(x)$ es un infinitésimo de orden superior, respecto de$g(x)$. Simbolizamos: $f = o(g) \quad (1)$

Si: $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\to} \infty$, $f(x)$ es un infinitésimo de orden inferior respecto de $g(x)$ $\quad g = o(f) \quad (2)$

Si: $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\to} k \neq 0$, $f(x)$ y $g(x)$ son infinitésimos del mismo orden $\quad f \approx k.g \quad (3)$

Sí además: $k = 1$; $\quad f(x)\ y\ g(x)$ son infinitésimos equivalentes.

(VI).- El producto de un infinitésimo para $x \to a$ por una función acotada es otro infinitésimo para $x \to a$.

(VII).- Si a un infinitésimo se le suma otro de orden superior se obtiene un infinitésimo equivalente al primero.

(VIII).- La diferencia entre dos infinitésimos equivalentes, es otro infinitésimo de orden superior a ellos.