TRABAJO PRÁCTICO Nº 6: DERIVADA Y DIFERENCIAL

Actividad Nº 1: La tabla exhibe la posición de un ciclista.

t (segundos)	0	1	2	3	4	5
s (metros)	0	1.4	5.1	10.7	17.7	25.8

a) Hallar la velocidad promedio para cada periodo:

(i) [3,5] (ii) [3, 4]

b) Usar la gráfica de s como una función de t para estimar la velocidad instantánea cuando t = 3.

Actividad Nº 2: Si se lanza una roca hacia arriba en el planeta Marte con una velocidad de 10 m/s, su altura en metros t segundos después, se obtiene mediante la función:

$$h = 10t - 1.86\, t^2.$$

a) Hallar la velocidad promedio en los intervalos de tiempo que se proporcionan:

(i) [1, 2] (ii) [1, 1.5] (iii) [1, 1.1] iv) [1, 1.01] (v) [1, 1.001]

b) Estimar la velocidad instantánea cuando t = 1.

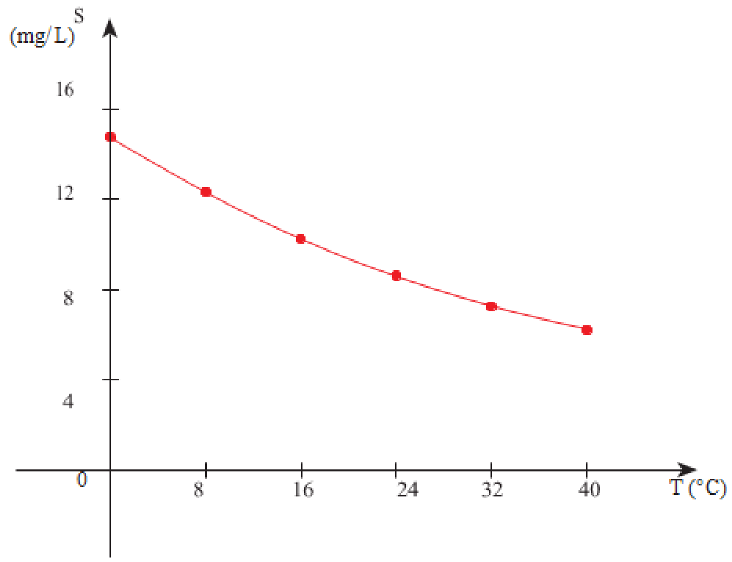
c) Calcular la velocidad instantánea aplicando límite del cociente de incrementos.

d) Interpretar la situación en un graficador.

Actividad Nº 3: La cantidad de oxígeno que se puede disolver en agua depende de la temperatura del agua. (De esa manera la polución térmica induce el contenido de oxígeno en el agua). La gráfica muestra cómo varía la solubilidad S de oxígeno como una función de la temperatura del agua T.

a) ¿Cuál es el significado de la derivada S'(T)? ¿Cuáles son sus unidades?

b) Estimar e interpretar el valor de S'(16).



Actividad Nº 4: La Aplicando reglas de derivación, hallar las derivadas de las siguientes funciones y expresar los resultados reducidos a su mínima expresión:

$a)\ f(x) = \frac{x^6}{5} - \frac{3x^2}{2} + \frac{1}{5}$ $\quad b)\ y = \frac{-3x^2}{2} - \frac{5}{x} + 2$ $\quad c)\ y = \frac{x}{x^2-1}$ $\quad d)\ y = \frac{ln(x^2-1)}{x-1}$

$e)\ f(t) = 4sen^2(-2t^2+5) - 2\cos(5+t)^3$ $\quad f)\ r(t) = \sqrt{\frac{t^2-4}{t}}$

$g)\ y = x\ e^{-kx}\ , k\ constante$ $\quad h)\ y = \frac{1}{(t^4+1)^3}$ $\quad i)\ y = 2^{Sen\ \pi x}$

Actividad Nº 5: Hallar la derivada de las funciones aplicando derivación logarítmica:

a) $y = (tg\ x)^{(1/x)}$ $\quad$ *b)* $y = \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$ $\quad$ *c)* $y = (ln\ x)^{Cos\ x}$

Actividad Nº 6: Dadas las funciones por tramos:

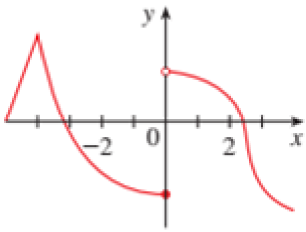
$\boldsymbol{a})f(x) = \begin{cases} |x+3| & si\ x \le 0 \\ 3 - x^2 & si\ x > 0 \end{cases}$ en x = -3 ; en x = 0

$\boldsymbol{b})f(x) = \begin{cases} |x^3| & si\ x \le 1 \\ -x+3 & si\ x > 1 \end{cases}$ en x=0 ; en x=1

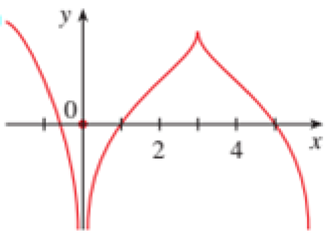
i) Representarla gráficamente.
ii) Escribir la expresión de la función derivada para cada tramo y graficarla en otro gráfico.
iii) Determinar analíticamente si ***f(x)*** es derivable en ***los puntos indicados***.
iv) Determinar si ***f(x)*** es continua en ***los puntos indicados***.

Actividad Nº 7: Indicar en cuáles valores las funciones no son derivables, justificando en cada caso:

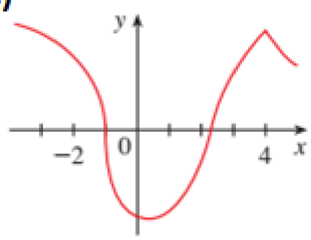
a)



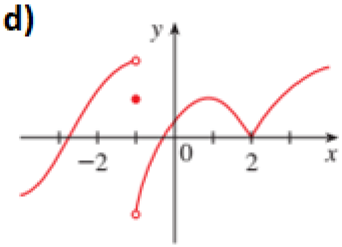
b)



c)



d)



Actividad Nº 8: Hallar las derivadas sucesivas de las funciones hasta el orden indicado en cada caso:

a) $f(x) = (x-1)^4$, n = 4 b) $f(x) = \sqrt{x+4}$ n = 4

c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ n = 3 d) $f(x) = e^{5x}$ $n = 4$

Actividad Nº 9: Dada la función: $y = \frac{2}{1-3x}$

a) Determinar la ecuación de la recta tangente y de la recta normal en la abscisa x = 0
b) Representar la función y las rectas halladas.

Actividad Nº 10: Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = \frac{2}{x+1}$ que son paralelas al segmento que une los puntos (1, -1) y (3,-5).

Actividad Nº 11: Determinar la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx$ cuya tangente en (1, 1) tiene por ecuación $y = 3x — 2$. Comprobar con un graficador.

Actividad Nº 12: Dada la curva implícita, calcular la ecuación de la recta tangente en el punto (3,1) graficándola con alguna aplicación:

Lemniscata de Bernoulli (forma de hélice): $2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2)$

Actividad Nº 13: Resolver las siguientes situaciones problemáticas:

I) Un objeto con peso W es arrastrado a lo largo de un plano horizontal por una fuerza que actúa a lo largo de una cuerda sujeta al propio objeto. Si la cuerda forma un ángulo θ con el plano, después la magnitud de la fuerza es $F = \frac{\mu W}{\mu\, Sen\, \theta + Cos\, \theta}$; donde μ es una constante llamada coeficiente de fricción.

a) ¿Cuáles son las variables?
b) Encontrar la relación de cambio de F con respecto a la variable de la que depende.

II) El movimiento de un resorte que se somete a una fuerza de fricción o una fuerza de amortiguamiento (como un amortiguador en un automóvil) se modela a menudo mediante el producto de una función exponencial y una función seno o coseno. Suponga que la ecuación del movimiento de un punto sobre tal resorte es

$$s(t) = 2\, e^{-1.5\, t}\, Sen\, 2\pi t$$

donde *s* se mide en centímetros y *t* en segundos.

a) Hallar la velocidad después que transcurren t segundos. Expresarlo de manera conveniente.
b) Utilizar un graficador y dibujar las funciones de posición y de velocidad para el intervalo $0 \leq t \leq 2$
c) Interpretar el resultado en el contexto del problema.

DIFERENCIALES

Actividad Nº 1: Hallar Δy ; dy para los valores dados de x ; $\Delta x = dx$ para la siguiente función:

$$y = e^x \; ; \; x = 0, \Delta x = 0{,}5$$

Graficar la función indicando los segmentos Δy ; dy

Actividad Nº 2: Resolver las siguientes situaciones problemáticas:

I) Se midió el radio de una esfera y se encontró que es 21 cm con un posible error en medición de cuanto mucho 0.05 cm. ¿Cuál es el error máximo al usar este valor del radio para calcular el volumen de la esfera?

II) Una ventana triangular de 3 m de base y 4 m de altura es modificada variando su altura en 15 cm.
a) Determinar mediante diferenciales la variación aproximada del área.
b) Calcular si hay diferencia entre el cálculo de la variación del área por diferenciales y el cálculo mediante incremento.

III) Se encontró que la arista de un cubo es de 30 cm, con un error posible de medición de 0.1 cm. Utilizar diferenciales para estimar el error máximo, error relativo y porcentual al calcular:

a) el área del cubo
b) la superficie lateral

IV) Utilizar diferenciales para estimar la cantidad de pintura necesaria para aplicar una mano de 0.05 cm de espesor a un domo hemisférico que tiene un diámetro de 50 m.

V) Un disco metálico se dilata por la acción del calor de manera que su radio aumenta de 5 a 5,06 cm. Hallar el valor aproximado del incremento del área.

ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

Actividad Nº 1: Aplicando la definición de derivada:

i) Hallar la derivada de las siguientes funciones
ii) Calcular el valor del cociente incremental en cada caso
iii) ¿Qué interpretación geométrica se le asigna a ese resultado?
iv) Calcular ***f ' (x₀)*** para el valor dado de x_0.

a) $f(x) = x^2 + 5x - 8$; $x_0 = 1$; $x_1 = x_0 + \Delta x = 1{,}2$

b) $f(x) = \sqrt{x}$; $x_0 = 0$; $\Delta x = 0{,}001$

Actividad Nº 2: Aplicando reglas de derivación, hallar las derivadas de las siguientes funciones y expresar los resultados reducidos a su mínima expresión:

a) $y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{x}$

d) $y = (a - x)\, x^{-2}$

g) $y = \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^4} - \sqrt[3]{3x}$

b) $y = \frac{3}{2}\pi - \frac{5}{4}\pi \cos x$

e) $y = \frac{3\cos x + tgx}{5x}$

h) $y = \frac{e^{8x}}{(1+e^{5x})}$

c) $y = \frac{\sqrt{x^3+3x^2}}{3x-2}$

f) $y = \frac{(x+1)^4}{(x-2)^3}$

i) $y = \ln(\, sen^2 x\,) + \frac{2}{sen\ x}$

Actividad Nº 3: Hallar la derivada de la función aplicando derivación logarítmica:

$$y = sen(ln\, 2\, x)^{4x}$$

Actividad Nº 4: Derivar por fórmula la función implícita:

$$\operatorname{sen}\frac{x}{y} - \ln y = 8x$$

Actividad Nº 5: Dadas las siguientes funciones:

$\boldsymbol{i)} f(x) = \begin{cases} -2 & si\ x \le 1 \\ x-2 & si\ x > 1 \end{cases}$ en a=1 $\boldsymbol{ii)} f(x) = \begin{cases} x & si\ x \le 0 \\ x^2 & si\ x > 0 \end{cases}$ en a=0

a) Representarlas gráficamente.
b) Determinar si ***f(x)*** es derivable en ***a***.
c) Determinar si ***f(x)*** es continua en ***a***.

Actividad Nº 6:

Sea: $f(x) = \begin{cases} \ln(x^2+1)\,.\frac{2}{x^2} & ;\quad x < 0 \\ a & ; x = 0 \\ \frac{x}{1-\sqrt{1-x}} & ;\quad 0 < x < 1 \end{cases}$

a) Determinar analíticamente el valor de $\boldsymbol{a}$ para que la función resulte continua en $x = 0$.
b) Con el valor de $\boldsymbol{a}$ hallado, justificar analíticamente si la función es derivable en $x = 0$

Actividad Nº 7: Dada la función $y = x^2 - x + 1$ y el punto (2 ; 3)
a) Determinar la ecuación de la recta tangente y de la recta normal en el punto dado.
b) Representar la función y las rectas halladas.

Actividad Nº 8: Dada $f(x) = \frac{1}{x+2}$, hallar los puntos de su grafica donde la recta tangente tiene pendiente igual a $-\frac{1}{9}$

Actividad Nº 9: En la función $f(x) = x^4 - 7x^2 + 12$

a) Determinar f ´(x)

b) Hallar f ´(0); f ´($\sqrt{\frac{7}{2}}$)

c) Determinar la ecuación de la recta tangente a f(x) en $x_1 = 0$; en $x_2 = \sqrt{\frac{7}{2}}$; en $x_3 = -\sqrt{\frac{7}{2}}$

d) Dibujar dichas tangentes en el mismo gráfico que f(x).

Actividad Nº 10: Dadas las funciones: $f(x) = x^2 - 4$ $g(x) = +\sqrt{4 - x^2}$
a) ¿Para qué valor de x será f ´(x) = 0?
b) ¿Para qué valor de x será g´(x) = 0?

Actividad Nº 11: Analizar detalladamente en qué punto la tangente a la parábola $y = x^2 - 7x + 3$ es paralela a la recta $-5x + y - 3 = 0$. Graficar la función y las rectas mencionadas.

Actividad Nº 12: **PROBLEMAS FÍSICOS DE APLICACIÓN**

Un punto recorre en línea recta la distancia **s** según la ley $s = \frac{1}{3}t^3 - 16\,t$. Determinar su *aceleración* "**a**" en el punto en el cual su velocidad se anula.

DIFERENCIALES

Actividad Nº 13: PROBLEMAS

a) Hallar el valor aproximado del volumen de una cáscara esférica de radio externo 100mm y 1mm de espesor. Comparar con el verdadero valor. Volumen de la esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$.

b) Se da el radio de un disco circular como de 24 cm, con un error máximo en la medición de 0.2 cm.
   i) Utilice diferenciales para estimar el error máximo en el área calculada del disco.
   ii) ¿Cuál es el error relativo? ¿Cuál es el error en porcentaje?