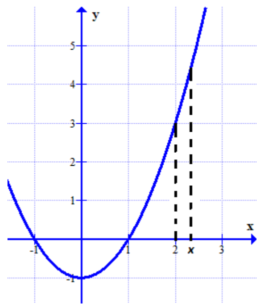
TRABAJO PRÁCTICO N° 12: LÍMITES (Definición y propiedades)

Concepto intuitivo de límite

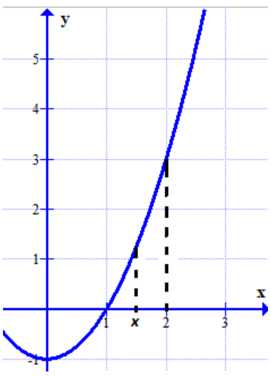
Supongamos que tenemos una función $y = f(x)$ / $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Saber cuál es el comportamiento de la función en un número real a es muy sencillo, simplemente calculamos f en a y vemos que pueden suceder dos cosas: que existe un número real $f(a)$, o no existe $f(a)$. Pero saber cuál es el comportamiento de la función muy cerca de a sin referirnos a un punto especifico y sin referirnos a a, es un problema bastante delicado pero de gran importancia, ya que conociendo este comportamiento se tiene una amplia información sobre la gráfica de la función cerca de a, información que no se puede tener si solamente se conoce la función en el punto.

Presentaremos diversas situaciones en las cuales se mostrará, a partir de las gráficas de funciones, que sucede con las imágenes de una variable ***x*** a medida que esta variable se acerca a un punto fijo $\boldsymbol{a}$, sin llegar a ser $\boldsymbol{a}$, pero acercándosele tanto como se quiera. Este procedimiento se denomina: ***método gráfico de resolución.***

Ejemplo 1: Consideremos la función $f(x) = x^2 - 1$ y tomaremos $\boldsymbol{a} = 2$.
Conocer el comportamiento de la función en $x = 2$, es simplemente calcular $f(2)$, que en este caso es $f(2) = 2^2 - 1 = 3$ o sea $2 \in Df$.
Pero para conocer el comportamiento de la función cuando la variable x se está acercando a 2, es preciso observar que:



1° En la gráfica podemos ver que a medida que x se acerca a 2 por su derecha, sus imágenes se van acercando a 3, lo que se suele expresar diciendo, que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 2 por la derecha es 3 y se simboliza: $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3$



2° De manera análoga, podemos ver que a medida que x se acerca a 2 por su izquierda, sus imágenes se van acercando a 3, lo que se suele expresar diciendo, que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 2 por la izquierda es 3 y se simboliza: $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 3$

Observemos que en este caso la gráfica de la función tiende al mismo valor cuando x se acerca a 2 tanto por la derecha como por la izquierda y además que ese valor común de límites laterales coincide con el valor de f en 2, $f(2) = 3$. Más adelante trabajaremos con este tipo de funciones, a los que llamamos continuas.

Determinemos el límite de la función mediante el **método numérico**:

Si se confecciona una tabla de valores para puntos próximos a 2, es decir, valores de x que pertenecen a un entorno reducido de 2, las imágenes correspondientes de la función $f(x)$ son:

X	*f(x)*
1,9	*2,61*
1,99	*2,9601*
1,999	*2,996001*
1,9999	*2,99960001*
2,0001	3,00040001
2,001	3,004001
2,01	3,0401
2, 1	3,41

Observamos que cuando x se aproxima a 2 con valores mayores o menores a 2, $f(x)$ se aproxima o **tiende** a 3.
Por lo tanto, cuando la distancia, entre x y 2 se hace más pequeña, la distancia entre *f* (x) y 3 se hace también más pequeña. Si recordamos que la distancia entre dos valores se puede simbolizar mediante la diferencia en valor absoluto, resulta:

$\|x-2\|$	$\|f(x)-3\|$
$\|1,9-2\| = 0,1$	$\|2,61-3\| = 0,39$
$\|1,99-2\| = 0,01$	$\|2,9601-3\| = 0,0399$
$\|1,999-2\| = 0,001$	$\|2,996001-3\| = 0,003999$
$\|1,9999-2\| = 0,0001$	$\|2,99960001-3\| = 0,00039999$
$\|2,0001-2\| = 0,0001$	$\|3,00040001-3\| = 0,00040001$
$\|2,001-2\| = 0,001$	$\|3,004001-3\| = 0,004001$
$\|2,01-2\| = 0,01$	$\|3,0401-3\| = 0,0401$
$\|2,1-2\| = 0,1$	$\|3,41-3\| = 0,41$

Cuando se quiere definir una distancia como muy pequeña, es necesario fijar a partir de qué número real se considera "muy pequeña" una distancia. Es por eso que se consideran a los números reales positivos δ y ε , como la distancia que definirá la proximidad de dichos puntos.
Es decir, cuando x se aproxima a 2 se expresa como: $|x-2| < \delta$, entonces la distancia entre *f* (x) y 3 se hace más pequeña, es decir $|f(x)-3| < \varepsilon$.
De lo que se deduce que el límite de la función *f* cuando x tiende a 2, es 3. Simbólicamente:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 3$$

Intuitivamente la idea que tenemos de límite de una función en un punto es el número hacia el que se aproximan los valores que toma la función cuando la variable independiente se aproxima a ese punto, esa proximidad se puede determinar mediante tabla o desde el gráfico de la función.

Actividad N° 1: Determina el límite de la función $f(x) = 2x - 1$ cuando x tiende a 3, justifica tu respuesta mediante el análisis del gráfico de la función y mediante el método numérico (confección de tablas) explicando cada observación que debiste hacer para establecer el resultado.

Actividad N° 2: Si se fijara una distancia máxima para establecer la cercanía al valor del límite, en $\varepsilon = 0{,}1$, señala el entorno en el eje *y* del gráfico de la función, e indica con que valores del Dominio se relacionan. ¿Es posible definir la máxima distancia a la que pueden estar los puntos del dominio del valor x=3, para que sus imágenes pertenezcan al entorno de radio ε?

En base a lo trabajado hasta ahora podemos dar una definición coloquial de límite:

> Si $f(x)$ se acerca arbitrariamente a un número L cuando x se aproxima a a, punto de acumulación del dominio de la función, entonces el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a a es L.
> $$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

*Para ampliar el concepto y poder dar la definición formal de límite, es necesario que veamos el siguiente ejemplo, ya que n*os interesa ver en qué condiciones los valores de una función se aproximan a un número real determinado cuando los puntos del dominio se acercan a un valor $\boldsymbol{a}$ que puede no pertenecer a dicho dominio.

Ejemplo 2: Sea la función: $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & si \quad x \neq 3 \\ 4 & si \quad x = 3 \end{cases}$

Calculemos entonces algunos valores de la función en cuando x tiende a 3:

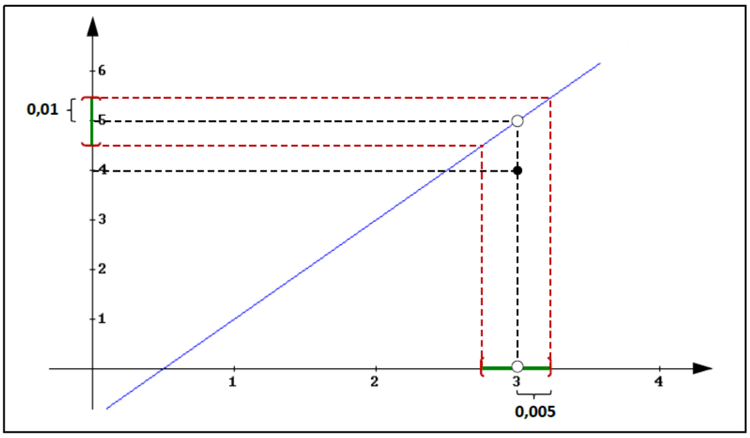
x se aproxima a **3** por la izquierda. → ← x se aproxima a **3** por la derecha.

x	2,8	2,9	2,99	2,999	…	3	…	**3,001**	3,01	3,1	3,2
$f(x)$	4,6	4,8	4,98	4,998	…	5	…	**5,002**	5,02	5,2	5,4

$f(x)$ se aproxima a **5**. → ← $f(x)$ se aproxima a **5**.

El hecho de que $f(3) = 4$ no influye en la existencia ni en el valor del límite cuando x se aproxima a 2, por ejemplo, si la función hubiera sido $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & si \quad x \neq 3 \\ -2 & si \quad x = 3 \end{cases}$ el límite seguiría siendo el mismo.

Podemos ver que la función se acerca a 5 para todos los x distintos de $x \neq 3$, es decir existe límite y es 5, como se muestra en la figura:



Observamos que los valores de la función se acercan al número 5 cuando los valores de x se acercan al número 3. Aún más, la función puede alcanzar cualquier valor próximo a 5 con tal de considerar a x suficientemente próximo a 3, ***sin que sea necesario tomar el valor de x = 3***. Si fijáramos un valor de $\varepsilon = 0{,}01$, para que la distancia entre $f(x)$ y 5 sea menor que un centésimo (1), podríamos observar que los valores del dominio que les corresponden tendrán una distancia a 3 menor a 0, 005, pero con $x \neq 3$ (2)

(1) *f(x)* y 5 tienen una distancia menor a ε es equivalente a $|f(x) - 5| < \varepsilon$, si lo expresamos como un entorno sería $E(5, \varepsilon)$, centro =5 y semiamplitud = ε

(2) *x* y 3 tienen una distancia menor a $\delta = 0{,}005$, pero con $x \neq 3$, es equivalente a $0 < |x - 3| < \delta$, sí lo expresamos como un entorno reducido, sería $E'(3, \delta)$, centro 3 y semiamplitud δ.

Estamos en condiciones de definir de manera formal al límite finito de una función:

LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Definición: Sean *f* una función y *a* un número real, punto de acumulación del dominio de la función. *f* está definida en un entorno reducido de centro *a*, es decir, *f* no está necesariamente definida en *a*. Se dice que la función *f* ***tiende a un número L*** cuando x tiende al punto *a* o que L es límite de *f* en el punto *a*, si para cualquier $\varepsilon > 0$, por pequeño que este sea, existe un intervalo alrededor de *a*, es decir $(a - \delta, a + \delta)$, tal que $|f(x) - L|$ es menor que ε, para todos los puntos $x \epsilon (a - \delta, a + \delta)$ diferentes de *a.*
Cuando esto ocurra se escribe: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

Es decir:

Una función f tiene por límite L cuando x tiende a a si para todo entorno $E(L, \varepsilon)$ existe un entorno $E(a, \delta)$, de modo que para todo x perteneciente al entorno reducido $E'(a, \delta)$ se cumple que $f(x)$ pertenece al entorno $E(L, \varepsilon)$

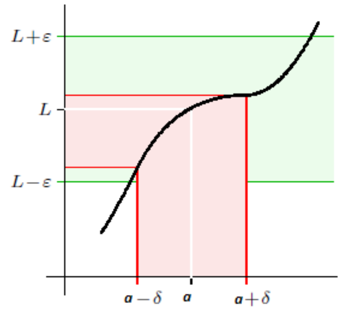
$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad / \quad \forall x \in E(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in E(L, \varepsilon)$$

Por la definición de entorno podemos expresar la definición de límite de la siguiente manera:

Una función f tiene por límite L cuando x tiende a a si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$

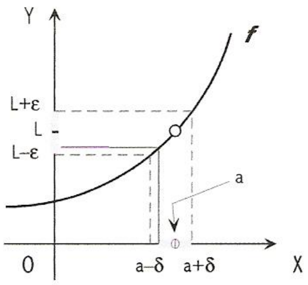
$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \; / \; \forall x : (x \in Df \wedge 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

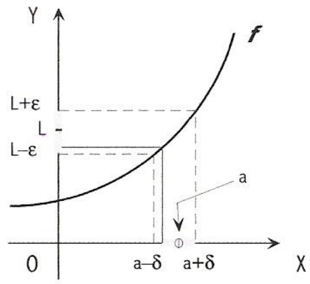
Interpretación gráfica



En la figura de la derecha se ve que, en efecto, para los puntos cercanos a ***a*** (en fondo rojo) sus imágenes (en fondo rojo) están dentro de la cercanía de *L* fijada (en fondo verde).
Que L sea límite significa que es un número al cual se pueden aproximar los valores *f(x) tanto como se quiera.* Una manera de medir la proximidad de *f(x)* y L es mediante el valor absoluto de su diferencia: $|f(x) - L|$, que geométricamente representa la distancia entre los puntos en la recta real correspondientes a los reales $f(x)$ y L, así el límite será un número L tal que la distancia $|f(x) - L|$ entre $f(x)$ y L se pueda hacer tan pequeña como se quiera, con tal que se elija x suficientemente cercano a *a. Y como se puede observar en el Ejemplo 2 es irrelevante que la función este definida o no en el punto a.*

Se fija un valor pequeño ε como radio del entorno de centro L. Por $L + \varepsilon$ y $L - \varepsilon$, se trazan paralelas al eje *x* hasta interceptar al gráfico de la función, luego se proyectan esas intersecciones sobre el eje *x*.
Si quedan determinados dos valores de δ, a ambos lados de *a*, se considera el entorno reducido *de centro a y radio* δ *, siendo* δ *el menor valor de ambos radios, es decir:* $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$ *para que satisfaga la definición.*





Ejemplo 3: Para demostrar analíticamente que $\lim_{x \to a} f(x) = L$, debemos encontrar un $\delta > 0$ para un $\varepsilon > 0$ cualquiera y muy pequeño que verifique la implicación:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Retomando el Ejemplo 2, para demostrar analíticamente que $\lim_{x \to 3} f(x) = 5$, con $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & si \quad x \neq 3 \\ 4 & si \quad x = 3 \end{cases}$ debemos encontrar un $\delta > 0$ para un $\varepsilon > 0$ cualquiera y muy pequeño. Haciendo $\varepsilon = 0{,}01$ buscaremos que verifique la implicación:

$$0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow \underbrace{|(2x - 1) - 5| < 0{,}01}_{(1)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{|2x - 6| < 0{,}01}_{(2)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{|2(x - 3)| < 0{,}01}_{(3)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{|2|.|x - 3| < 0{,}01}_{(4)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{|x - 3| < \frac{0{,}01}{2}}_{(5)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{|x - 3| < 0{,}005}_{(6)}$$

(1) En |f(x) -L|<0,001, remplazamos por la expresión de la función, que corresponde a los valores próximos a x=3. Realizamos la operación en el valor absoluto.
(2) A la expresión: 2x-6, podemos factorizar, sacando 2 como factor común, resulta 2(x-3)
(3) El valor absoluto de un producto es igual al producto de los valores absolutos, por lo tanto, se distribuye.
(4) El |2|=2, si dividimos a ambos miembros por 2, la desigualdad no cambia.
(5) En el 2° miembro se divide 0,01 por 2.
(6) Por hipótesis
$0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow 0 < |x - 3| \ y \ |x - 3| < \delta,$
$por \ lo \ tanto \ \delta = 0{,}005$

Por lo tanto:

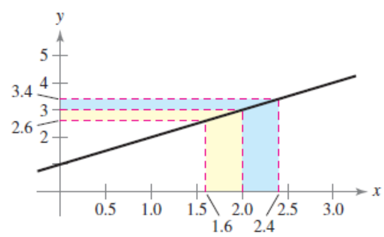
$$0 < |x - 3| < \delta \Leftrightarrow |x - 3| < 0{,}005$$

Entonces: $\delta = 0{,}005$ cuando $\varepsilon = 0{,}01$, lo que demuestra que para los valores de x en el $E'(3; 0{,}005)$, los valores correspondientes a $f(x)$ se encuentran en el $E(5; 0{,}01)$.

En general para cualquier número $\varepsilon > 0$, basta considerar:

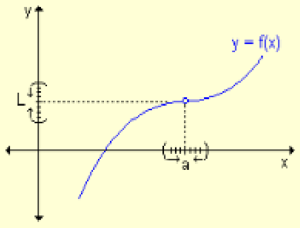
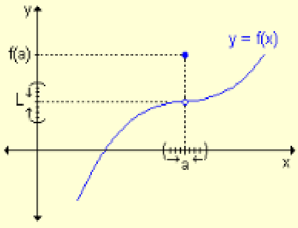
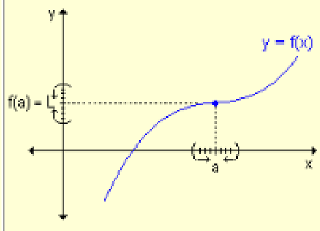
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > \frac{\varepsilon}{2} / \ 0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |x - 3| < \varepsilon$$

Actividad N° 3: En la figura se muestra la gráfica de $f(x) = x + 1$. Encontrá un $\delta \ tal \ que \ si \ 0 < |x - 2| < \delta, entonces \ |f(x) - 3| < 0{,}4$



<u>Actividad N° 4</u>: Calcula el $\lim_{x\to 4}\left(4-\frac{x}{2}\right)$. Luego, determina un $\delta > 0\ tal\ que\ |f(x)-L| < 0{,}01\ siempre\ que\ 0<|x-a|<\delta$.

<u>Resumiendo</u>:
El límite de una función en un punto puede existir, independientemente de lo que ocurre con la función en el punto. En la siguiente tabla se muestran las distintas posibilidades:

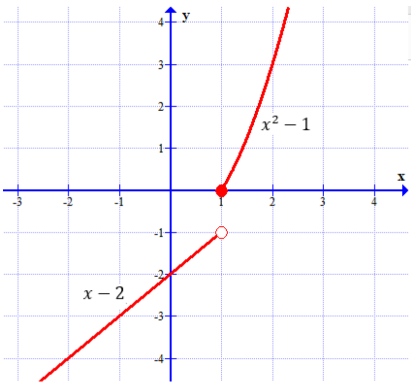
 • $\lim_{x\to a} f(x) = L$ • la función no está definida en a, $a \notin D_f$	 • $\lim_{x\to a} f(x) = L$ • la función está definida en a, existe f(a). • $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$	 • $\lim_{x\to a} f(x) = L$ • la función está definida en a, existe f(a). • $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$	En estos tres ejemplos se observa que el límite de la función f(x) cuando x tiende a "a" es el número L independientemente del comportamiento de la función en el punto.

Límites que no existen

En el siguiente ejemplo trabajaremos con una función por tramo donde se examinaremos la existencia de límite.

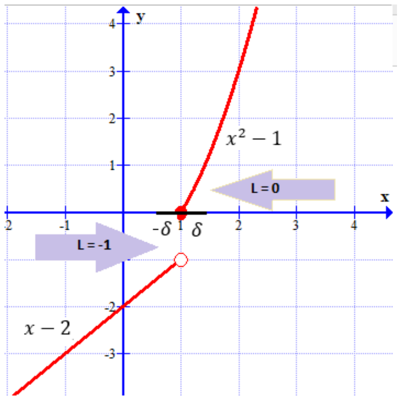
Funciones partidas o por tramos o por intervalos

Una **función partida** es aquella que para definirla se necesitan diferentes reglas de asignación para distintos subconjuntos del Dominio. Por ejemplo: $f(x)=\begin{cases} x-2\ si\ x\le 1 \\ x^2-1\ si\ x>1 \end{cases}$. Se debe tener en cuenta al momento de representarla gráficamente, que en el valor x = 1 la curva cambia de forma, por lo que a los valores de $x \le 1$, se obtienen sus imágenes reemplazando en $x-2$, y para los valores de $x>1$, se remplazan en x^2-1, teniendo en cuenta si el valor donde comienza o termina el subconjunto está o no incluido en el dominio. Así, resulta el siguiente gráfico:



Dominio =IR

Imagen=$(-\infty,-1)\cup[0,\infty)$



Si quisieramos calcular el límite de la función cuando x tiende a 1, tanto numérica como gráficamente podemos observar que al acercarse por derecha es distinto al valor del límite cuando se acerca por izquierda.
Esto significa que cuándo *x* se aproxime a 1 por la derecha los valores de *f*(*x*) toman valores cada vez más próximos a cero, y cuando x se aproxima a 1 por izquierda, *f*(*x*) toma valores cada vez más cercanos a -1.

De manera específica, si δ > 0, a los valores que cumplen con la desigualdad $0 < |x-1| < \delta$ se los pueden clasificar de la siguiente manera:

$$\underbrace{(-\delta;1)}_{f(x)\to -1} \qquad\qquad \underbrace{(1;\delta)}_{f(x)\to 0}$$

Debido a que los límites son diferentes, es decir $L^+ \neq L^-$, el límite en x = 1 No existe

$$\therefore \ \nexists \lim_{x\to 1} f(x)$$

A partir de este ejemplo, es importante tener en cuenta el siguiente Teorema:

<u>TEOREMA DE UNICIDAD DEL LÍMITE</u>: Si una función tiene límite, éste es único.
Si $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to a} f(x) = L_2$ entonces: $L_1 = L_2$

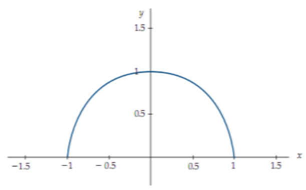
<u>Límites laterales y unilaterales</u>

Los **límites unilaterales** indican que la función se aproxima a un determinado valor a medida que x se aproxima a *a* por la derecha o por la izquierda. Debido a las restricciones del dominio, una función puede tener límites unilaterales, como, por ejemplo: $f(x) = \sqrt{x}$, no está definida para valores menores a cero, sin embargo, se puede acercar a cero tomando valores mayores a cero, es decir aproximarse, solo, por derecha.
Por último, los límites laterales pueden usarse para investigar el comportamiento de una función definida por partes.

Definiciones:
Se dice que L es el **límite lateral derecho o límite por la derecha** de la función *f* cuando x tiende a *a* por derecha, con x > a (se acerca a *a* de derecha a izquierda) $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$
Se dice que L es el **límite lateral izquierdo** de la función *f* cuando x tiende a *a* por izquierda, con x < a (se acerca a *a* de izquierda a derecha) $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$

Ejemplo 4: La función $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ está definida en el intervalo $[-1,1]$ y en x = -1 y en x = 1 se tienen límites unilaterales:

$$\lim_{x\to -1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} \sqrt{1-x^2} = 0 \ \text{ y } \ \lim_{x\to -1+} f(x) = \lim_{x\to -1+} \sqrt{1-x^2} = 0$$

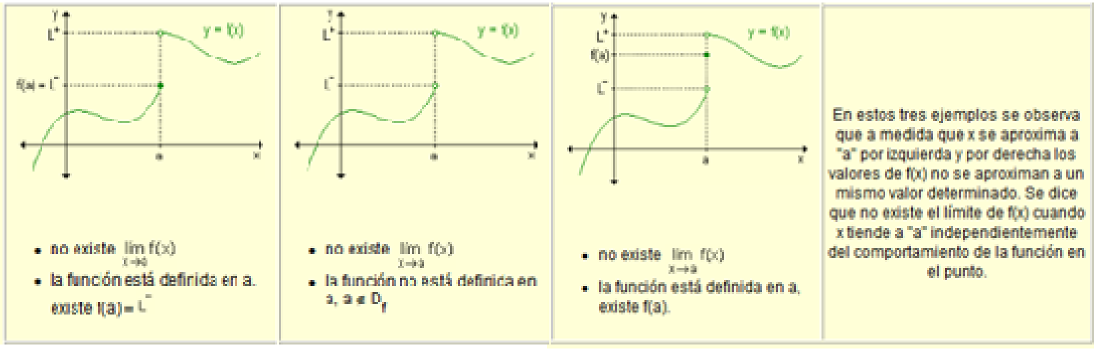


Condición necesaria y suficiente para la existencia del límite de una función en un punto

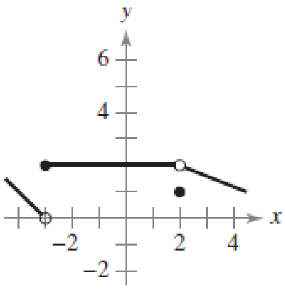
La condición necesaria y suficiente para que una función f tenga límite en un punto de abscisa a es que tenga límite lateral por la izquierda, tenga límite lateral por la derecha y ambos sean iguales.

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

Resumiendo:



Actividad N° 5: Indicá el valor de x donde no existe límite. Justificá tu respuesta:



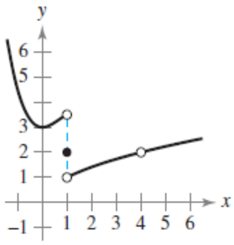
Actividad N° 6: Utilizá la gráfica de la función *f* para determinar si existe el valor solicitado. De ser así, ubícala en el gráfico; si no existe, explicar por qué.

a) $f(1)$

b) $\lim_{x\to 1} f(x)$

c) $f(4)$

d) $\lim_{x\to 4} f(x)$



Actividad N° 7: Hallá los límites laterales de la siguiente función y determina si existe el límite en cada punto. Represéntala gráficamente.

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1 & si \quad x \le 1 \\ x^2 & si \quad 1 < x < 2 \\ 3 & si \quad x > 2 \end{cases}$$

i) $\lim_{x\to 1^+} f(x) \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) \qquad \lim_{x\to 1} f(x)$

ii) $\lim_{x\to 2^+} f(x) \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) \qquad \lim_{x\to 2} f(x)$

Actividad N° 8: Dibujá la gráfica de *f*. Identificá los valores de *c* para los cuales existe el límite $\lim_{x\to c} f(x)$, siendo:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 2 \\ 8 - 2x, & 2 < x < 4 \\ 4, & x \ge 4 \end{cases}$$

Propiedades de los límites:

Los límites tienen propiedades que permiten determinar el comportamiento de las funciones y operar con ellos de una manera sencilla.

1- **Propiedad de la función constante**: El límite de una constante es igual al valor de la constante

$$\lim_{x \to a} k = k \qquad \text{Ejemplo: } \lim_{x \to 2} 3 = 3$$

2- **Propiedad de la función identidad**: El límite de la función identidad que se acerca a un valor **a** es igual al valor **a**.

$$\lim_{x \to a} x = a \qquad \text{Ejemplo: } \lim_{x \to 2} x = 2$$

3- **Propiedad de la función potencia**: El límite de una variable elevada a un exponente cuando x se acerca a un valor **a,** es igual al valor **a** elevada al exponente.

$$\lim_{x \to a} x^n = a^n \qquad \text{Ejemplo: } \lim_{x \to 2} x^3 = 2^3 = 8$$

Teorema: Sean f y g funciones definidas en un entorno reducido del punto a. Si existen los límites: $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$. Entonces existe:

1)._ $\lim_{x \to a}(f+g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = L_1 + L_2$ <u>Límite de la suma de dos funciones</u>

2)._ $\lim_{x \to a}(f.g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) . \lim_{x \to a} g(x) = L_1 . L_2$ <u>Límite del producto de dos funciones</u>

3)._ $\lim_{x \to a} kf(x) = kL$, con k constante <u>Límite de una contante por una función</u>

4)._ $\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x \to a} f(x)} = \frac{1}{L}$, $L \neq 0$ <u>Límite de la recíproca de una función</u>

5)._ $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$ $, L_2 \neq 0$ <u>Límite del cociente de dos funciones</u>

Estas Propiedades y Teoremas nos permiten calcular los límites de operaciones con funciones y de funciones compuestas, como se ven en los siguientes ejemplos:

$$\lim_{x \to 2} 2x + x^2 = \lim_{x \to 2} 2x + \lim_{x \to 2} x^2 = 2.2 + 2^2 = 4 + 4 = 8$$

$$\lim_{x \to 2} (2x)(x^2) = \lim_{x \to 2} 2x . \lim_{x \to 2} x^2 = (2.2)(2^2) = 4.4 = 16$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x+x^2}{3x} = \frac{\lim_{x \to 1} 2x+x^2}{\lim_{x \to 1} 3x} = \frac{2.1+1^2}{3.1} = \frac{3}{3} = 1$$

<u>**Funciones polinómicas**</u>

Las funciones polinómicas tienen límite finito cuando x tiende a a, siendo a un número real, y su límite coincide con el valor numérico del polinomio en a: $\lim_{x \to a} P(x) = P(a)$

Ejemplo: $\lim_{x\to 2}(x^2 + x - 3) = 2^2 + 2 - 3 = 3$

Actividad N° 9: Evaluar los siguientes límites indicando la propiedad o propiedades que se aplican en cada caso:

1. $\lim_{x\to 3} 77$	**2.** $\lim_{x\to 5}(3x-7)$	**3.** $\lim_{x\to 2}(x^2+2x-1)$
4. $\lim_{x\to 3}\frac{4x-5}{5x-1}$	**5.** $\lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{8x+1}{x+3}}$	**6.** $\lim_{x\to -3/2}\frac{4x^2-9}{2x+3}$

IMPORTANTE

Teoría adicional

Además de los conceptos trabajados en esta guía, en las actividades de evaluación se tendrán en cuenta los siguientes conceptos teóricos, por lo que recomendamos completen sus apuntes y los estudien para realizar las consultas de ser necesario:

Enunciados de los siguientes Teoremas, significado y su interpretación geométrica (sin demostración)

- Teorema de conservación del signo
- Teorema de confrontación entre límites
- Teorema de acotación

Enunciados, demostraciones e interpretaciones del límite en operaciones con funciones:

- Límite de la suma de dos funciones
- Límite del producto de dos funciones
- Límite de la recíproca de una función