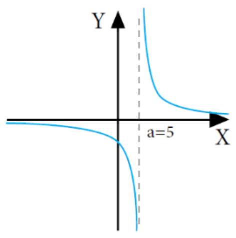
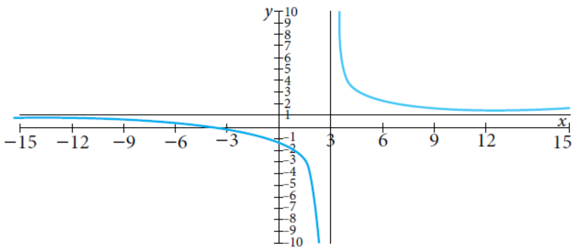
TRABAJO PRÁCTICO N°13: LÍMITE DE FUNCIONES RACIONALES – INDETERMINACIÓN 0/0

A continuación, repasaremos algunas características de las funciones algebraicas fraccionarias. En en las próximas guías aplicaremos el concepto de límite a este tipo de funciones.
Si mediante el uso de algún recurso electrónico digital (como una calculadora que grafique o en un software de computación) construyéramos la gráfica de las siguientes funciones algebraicas fraccionarias, tendríamos:

$\boldsymbol{a})\ y = \frac{1}{x-5}$



$\boldsymbol{b})\ y = \frac{x^2-16}{x^2-7x+12}$



El significado gráfico del dominio de una función es la proyección del gráfico sobre el eje "*x*" y la imagen la proyección sobre el eje "*y*".
Veamos que ocurre con el dominio y la imagen de los ejemplos anteriores:
En el caso del ejemplo ***a)***, el dominio, parecería que es todo el eje "*x*" menos el punto *x*=5. Podemos ver que la curva se acerca a la recta x=5 pero no la toca. De igual manera vemos que en la gráfica del ejemplo ***b),*** la proyección sobre el eje "*x*" lo cubre totalmente excepto el punto *x*=3, la gráfica se acerca a la recta *x*=3 pero no llega a tocarla. Las rectas x =5 y x =3 se denominan **"asíntotas verticales"** a la curva en cada uno de los ejemplos**.**
En el ejemplo ***a)*** el dominio resulta: $Dm = IR - \{5\}$, donde el valor x=5 es el número que anularía el denominador y no al numerador, por lo que coincide con la restricción de dominio y se obtiene algebraicamente $x - 5 \neq 0 \to x \neq 5$, podríamos inferir que la asíntota coincide con la raíz del denominador, sin embargo, en el otro ejemplo, si restringimos el Dominio resulta:
$x - x^2 - 7x + 12 \neq 0 \to x \neq 3\ y\ x \neq 4$ por lo tanto $Dm = IR - \{3; 4\}$ pero la asíntota vertical estaba en x = 3, ¿a qué se debe la diferencia?
El problema radica en que el procesador grafica la expresión "simplificada" y en este caso eso elimina un cero del denominador (*x*=4):

$$\frac{x^2-16}{x^2-7x+12} = \frac{(x-4)\,(x+4)}{(x-4)\,(x-3)} = \frac{x+4}{x-3}$$

El software grafica ésta expresión

esto muestra que no se debe confiar ciegamente en la imagen del procesador, es una guía muy buena, pero puede introducir errores.

En el caso de la imagen del ejemplo ***a)*** parecería que todo el eje "*y*" menos un punto, en este caso 0, sería el conjunto imagen: $IR - \{0\}$ y la curva se aproxima al eje "*y*" sin tocarla; y la imagen del ej. ***b)*** podemos ver que la proyección cubre todo el eje "*y*" excepto un punto que en la *curva* "inferimos" que es *y*=1. Luego, $Im = IR - \{1\}$. En este caso al igual que con el eje "*x*", en la gráfica se acerca a la recta *y*=1 sin llegar a tocarla.
Estas rectas se denominan **"asíntotas horizontales".**

La inferencia de la existencia de asíntotas a partir del gráfico es muy útil para visualizar la función pero pueden y deben ser comprobadas por métodos analíticos.

Observación: Cómo desde ahora trabajaremos con funciones fraccionarias, es importante aclarar que puede o no tener asíntotas, que podemos intuir su ubicación mirando la gráfica de la función, pero como los softwares no las marcan resulta necesario el análisis para su existencia mediante el estudio del límite, que se verá más delante de manera detallada.

Ejemplo: Dada la función $y = \frac{x^2-16}{x^2-7x+12}$ .Analiza la existencia del límite para $x \to 4$.

Primero observemos que el denominador de la función debe ser distinto de cero, por lo tanto, x debe ser distinto de 3 y 4 como ya lo analizamos anteriormente.
Por lo tanto, resulta que: $\nexists \boldsymbol{f(4)}$
Veamos entonces que pasa con el límite:
Si aplicamos la propiedad de límite de un cociente resulta:

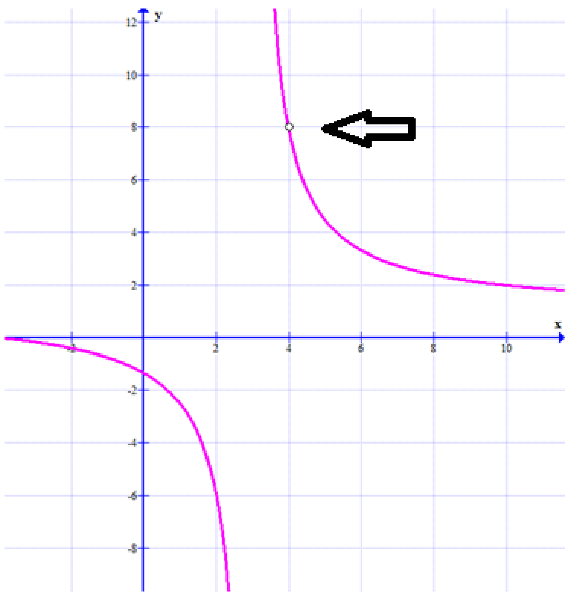
$$\lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)} \quad si \;\; Q(a) \neq 0$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2-16}{x^2-7x+12} = \frac{4^2-16}{4^2-7.4+12} = \frac{0}{0}$$

Se obtuvo como resultado 0/0, cuando el límite es igual a esta fracción recibe el nombre de **Límite Indeterminado** del tipo 0/0. En el cálculo del límite no se pudo obtener el valor al cual tiende la función, con solo aplicar la propiedad. Por lo cual, seguimos sin resolver el límite de la función. Debemos recurrir a otro método.

Observemos la tabla de valores y su representación gráfica, para analizar de manera intuitiva el valor del límite:

x	3,9	3,99	3,999	**4**	4,001	4,01	4,1
f(x)	8,78	8,07	8,007	**8**	7,99	7,93	7,36



Como podemos ver que el límite existe y parece ser 8. Por lo tanto, esta indeterminación del límite nada dice sobre la existencia o no del límite.

Veremos los pasos para poder resolver algebraicamente el límite.

No podemos encontrar el límite por sustitución directa de x por el valor 4, porque la función no está definida en ese punto. El procedimiento consiste en buscar una función que posea el mismo dominio y además incluya el valor x = 4, y con la misma grafica.
¿Es posible dar con esta función? Sí, es posible, y es la que se obtiene de la expresión reducida de la expresión algebraica fraccionaria.
La obtenemos factoreando numerador y denominador:

$$\frac{\overbrace{x^2-16}^{\boxed{1}}}{\underbrace{x^2-7x+12}_{\boxed{2}}}=\frac{\cancel{(x-4)}(x+4)}{\cancel{(x-4)}(x-3)}=\frac{x+4}{x-3}$$

1) x^2-16 es una diferencia de cuadrados por lo tanto es igual a (x-4)(x-3) donde 4 y 3 son las raíces del polinomio, es decir son los valores que lo anulan.
2) $x^2-7x+12$ se resuelve la ecuación asociada, es decir, $x^2-7x+12=0$ con calculadora se obtiene que x = 3 y x = 4, por lo tanto, recordando que $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, si x_1 y x_2 son las raíces del polinomio.
Resulta: $x^2-7x+12=(x-4)(x-3)$

El numerador y denominador tienen en común el factor $x-4$, por lo tanto, se puede simplificar, cancelando así el factor que anulaba el denominador.
Ahora estamos en condiciones de aplicar límite para x tendiendo a 4 a la expresión simplificada.

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2-7x+12}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x-3)}=\lim_{x\to 4}\frac{x+4}{x-3}=\frac{4+4}{4-3}=8$$

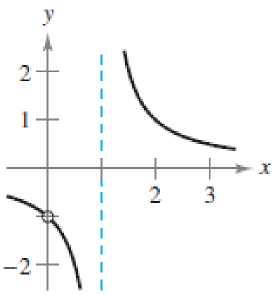
De esta manera resolvimos el límite.

NOTA: En el ejemplo pudimos calcular el límite sustituyendo la función dada, $f(x)=\frac{x^2-16}{x^2-7x+12}$ por la función más sencilla, $g(x)=\frac{x+4}{x-3}$, que posee el mismo limite. Esto es válido porque $f(x)=g(x)$, excepto cuando *x* =4, y al calcular el límite cuando *x* tiende 1, no se considera que sucede cuando *x* es en realidad *igual* a 4. En general, podemos decir:

Si $f(x)=g(x)$ cuando $x\neq a,$ entonces $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)$ siempre que el límite exista.

Actividad N° 1: Utiliza la gráfica de las siguientes funciones para determinar el límite (si existe) de manera visual. Luego escribe una función más simple que coincida con la dada, salvo en un punto, y calcula el límite de manera algebraica.

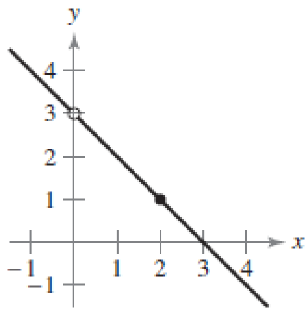
$f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x}$



a) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

$h(x) = \dfrac{-x^2 + 3x}{x}$



a) $\lim\limits_{x \to 2} h(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$

Actividad N° 2: Sean las funciones:

$u(x) = \frac{x^2-9}{x-3}, \forall x \neq 3$ $\quad v(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3}, x \neq 3 \\ 4 \;\;,\;\; x = 3 \end{cases}$ $\quad w(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3}, x \neq 3 \\ 6 \;\;,\;\; x = 3 \end{cases}$

a) Grafíca con Geogebra, cada una de las funciones. Indica Dom. e Im.
b) ¿A qué valor tiende la función, cuando x toma valores muy próximos a 3?
c) ¿A qué conclusión se llega en relación con la existencia del límite, al comparar cada uno de los ejemplos?
d) Verifica, mediante procedimiento algebraico el límite de las funciones para x tendiendo a 3.

Actividad N° 3: ***Análisis gráfico***

La afirmación $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$ significa que:

a cada $\varepsilon > 0$ le corresponde un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-2| < \delta$, entonces $\left|\frac{x^2-4}{x-2} - 4\right| < \varepsilon$

Si $\varepsilon = 0{,}001$, entonces $\left|\frac{x^2-4}{x-2} - 4\right| < 0{,}001$

Grafíca, con algún soporte tecnológico, la función $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, *u*sando la función *zoom*, marca cada intervalo donde corresponde y explica el significado de cada uno y como incide en la existencia y el resultado del límite.

Actividad N° 4: Resolver los siguientes límites:

$a)\ \lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} =$ $\quad$ b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{2x^2-3x-2}{x-2} =$ $\quad$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3+4x^2}{x^5-2x^2} =$

Ejemplo: Resuelve el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-x^2-4x+4}{x^2-x-2} =$

Si aplicamos límite, sustituyendo x por 2 en el cociente, resulta:

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-x^2-4x+4}{x^2-x-2} = \frac{0}{0}$, se indetermina, vamos a realizar otro método para salvar la indeterminación.

La indeterminación se origina, porque el valor 2, es raíz del numerador y del denominador, en esto basamos el procedimiento que usaremos.
Para resolverla lo que hacemos es dividir el numerador y denominador por $x-2$ (2 porque es el número que anula el numerador y el denominador). Vamos a realizar estas divisiones aplicando la regla de Ruffini.

1° paso: La división del numerador $(x^3-x^2-4x+4):(x-2)$ es:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -1 & -4 & 4 \\ 2 & & 2 & 2 & -4 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

Usando la prueba de la división (el dividendo es igual a cociente por divisor más el resto)
Resulta:

$$x^3-x^2-4x+4=(x-2)(x^2+x-2)$$

2° paso: La división del denominador $(x^2-x-2):(x-2)$ es:

$$\begin{array}{r|rr|r} & 1 & -1 & -2 \\ 2 & & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Que verifica:

$$(x^2-x-2)=(x-2)\,(x+1)$$

Si sustituimos en el límite, numerador y denominador, podremos simplificar el factor $x-2$, logrando obtener el límite:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-x^2-4x+4}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+x-2)}{(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-2}{x+1}=\frac{2^2+2-2}{2+1}=\frac{4}{3}.$$

Actividad N° 5: Resolver los siguientes límites:

$a)\ \lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^6-1}=$ $\qquad b)\ \lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+6x^2+12x+8}{x^2+4x+4}=$ $\qquad c)\ \lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^5-x^2}=$