



TRABAJO PRÁCTICO N°15: LÍMITES POR RACIONALIZACIÓN - INFINITÉSIMOS

En esta guía trabajaremos con límites de funciones irracionales y los pasos que deberemos emplear para salvar indeterminaciones.

Límites a funciones irracionales - indeterminaciones 0/0

Ejemplo: Analiza la existencia del siguiente límite: $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$

Si confeccionamos la tabla de valores, para ver hacia donde tiende la función, cuando t se acerca a 0:

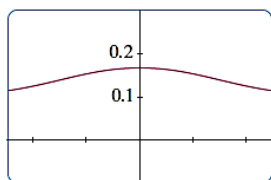
t	$\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$
± 1.0	0.16228
± 0.5	0.16553
± 0.1	0.16662
± 0.05	0.16666
± 0.01	0.16667

Podemos ver que para valores de t cercanos a 0, la función se aproxima a 0,1666666...

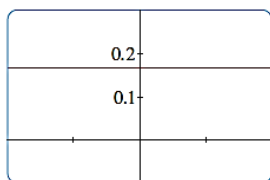
Es decir:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2} = \frac{1}{6}$$

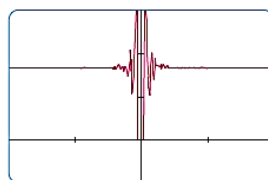
Analizando su representación gráfica, podemos ver en la siguiente secuencia de imágenes, las cuales están ordenadas de manera decreciente respecto de la escala, el valor de la función cuando x tiende a 0:



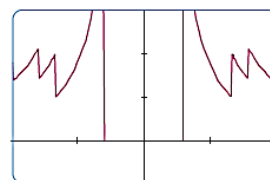
a) $[-5, 5]$ por $[-0.1, 0.3]$



b) $[-0.1, 0.1]$ por $[-0.1, 0.3]$



c) $[-10^{-6}, 10^{-6}]$ por $[-0.1, 0.3]$



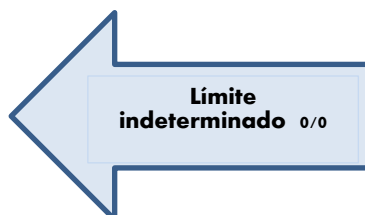
d) $[-10^{-7}, 10^{-7}]$ por $[-0.1, 0.3]$

En la imagen a), podemos ver que la función se aproxima a $1/6$, sin embargo, cuando acercamos la imagen, obtenemos gráficos erróneos y ya no estamos en condiciones de establecer el valor del límite.

Es por todo lo anterior, que los pasos para llegar al límite de manera intuitiva no son válidos, debemos utilizar métodos de resolución algebraicos.

Si comenzamos por aplicar las propiedades del límite de operaciones con funciones, donde podemos reemplazar t por 0, resulta:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2} = \frac{\sqrt{0^2+9}-3}{0^2} = \frac{0}{0}$$





SOLUCIÓN: Cómo no podemos aplicar inmediatamente la ley del cociente, ya que el límite del denominador es 0, el método algebraico que utilizaremos será el de racionalización:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} \cdot \frac{\sqrt{t^2 + 9} + 3}{\sqrt{t^2 + 9} + 3} && \text{Multiplicamos y dividimos por el conjugado del numerador} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t^2 + 9) - 9}{t^2(\sqrt{t^2 + 9} + 3)} && \text{Multiplicamos los conjugados, recordando que: } (a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2 \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{t^2(\sqrt{t^2 + 9} + 3)} && \text{En el numerador se cancelan el 9 y en el denominador debe quedar el producto con factores para poder simplificar.} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 9} + 3} && \text{Simplificamos } t^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lim_{t \rightarrow 0} (t^2 + 9)} + 3} = \frac{1}{3 + 3} = \frac{1}{6} && \text{Aplicamos propiedad de límites del recíproco y de raíz, y calculamos.} \end{aligned}$$

Actividad N°1:

- Utiliza la gráfica de $f(x) = \frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x}$ para estimar el valor de $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ con dos decimales.
- Utiliza una tabla de valores de $f(x)$ para estimar el límite con cuatro decimales.
- Utiliza las propiedades de los límites para encontrar el valor exacto del límite.

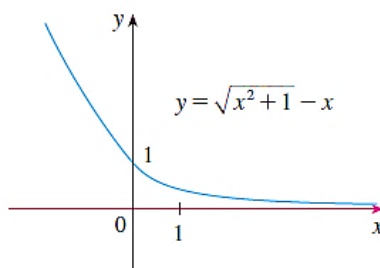
Actividad N°2: Calcula mediante propiedades, el valor de los siguientes límites:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x}-3}{x} & \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3-\sqrt{4x+1}}{x-2} & \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} & \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 16} \frac{16x-x^2}{4-\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Límites de funciones irracionales con indeterminaciones del tipo $\infty - \infty$

Ejemplo: Analiza la existencia del siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$

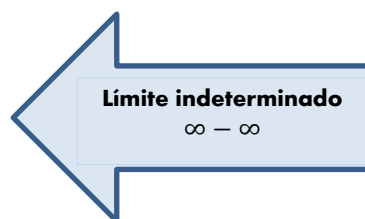
Como $\sqrt{x^2 + 1}$ como x son muy grandes cuando x tiende a infinito, no podemos recurrir a tablas de valores para ver a que valor tiende la función. Desde el análisis del gráfico podemos observar que la diferencia de funciones, tiende a cero cuando x crece.





Pero para resolverlo, mediante propiedades de límites, aplicaremos el mismo procedimiento que en las actividades anteriores:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = \infty - \infty$$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

Multiplicamos y dividimos por el conjugado

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 1) - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

Multiplicamos los conjugados, recordando que:
 $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

En el numerador se cancelan el x^2

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0$$

Aplicamos propiedad de límites del recíproco y de raíz, donde $(\sqrt{x^2 + 1} + x)$ tiende a infinito si x crece
Resultando: $\frac{1}{\infty} \rightarrow 0$

Actividad N° 3:

a) Estima el valor de $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x)$ dibujando la gráfica de la función

$$f(x) = (\sqrt{x^2 + x + 1} - x)$$

b) Utiliza las propiedades de los límites, para encontrar el valor exacto del límite.

Actividad N°4: Calcula mediante las propiedades, el valor de los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{9x^2 + x} - 3x)$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 2x})$

INFINITÉSIMOS

Definición:

Se dice que la función f es un infinitésimo para $X \rightarrow a$ (o en $x = a$), si se verifica $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

Es decir, un infinitésimo es una función cuyo límite es cero cuando la variable independiente x se aproxima al valor a . A los infinitésimos se los suele simbolizar con letras griegas como ε, φ , etc.

Ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x - 1 = 0 \rightarrow f(x) = e^x - 1 \text{ es infinitésimo para } x = 0$$



$\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0 \rightarrow f(x) = \ln x$ es infinitésimo para $x = 1$

Actividad N°5: Analiza cuáles de las siguientes funciones son infinitésimos en el valor x indicado:

a) En $x = 1$: $f(x) = x^3 - 1$; $g(x) = x - 1$; $h(x) = \sqrt{x} - 1$ y $i(x) = \sqrt{x+1} - 1$

b) En $x = 0$: $f(x) = 1 - \sqrt{x+1}$; $g(x) = 4x^2$; $h(x) = \sqrt{x^4 + x^2}$ y $i(x) = x$

Comparación de infinitésimos (Órdenes infinitesimales)

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos infinitésimos en $x = a$.

1. Se dice que $f(x)$ y $g(x)$ tienen el **mismo orden** si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = k$, con $k \neq 0$. Significa que ambos infinitésimos tienden a cero, aproximadamente con la misma rapidez, cuando x se aproxima a a .
2. Se dice que $f(x)$ es un **infinitésimo de orden superior** que $g(x)$ si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Significa que $f(x)$ tienden a cero con mayor rapidez que $g(x)$, cuando x se aproxima a a .
3. Se dice que $f(x)$ es un **infinitésimo de orden inferior** que $g(x)$ si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$. Significa que $g(x)$ tienden a cero con mayor rapidez que $f(x)$, cuando x se aproxima a a .
4. Cuando no existe el límite $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, se dice que los infinitésimos no son comparables.
5. Se dice que dos infinitésimos $f(x)$ y $g(x)$ son **equivalentes** si el $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Ejemplos:

a) La función $f(x) = x^2$ es un infinitésimo de orden superior que $g(x) = x$, en $x = 0$, porque

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$$

b) La función $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ es un infinitésimo de orden inferior que $g(x) = x^3$, en $x = 0$, porque

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^3} = \infty$$

c) La función $f(x) = 2x$ es un infinitésimo de igual orden que $g(x) = 6x$, en $x = 0$, porque

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{6x} = \frac{1}{3}$$

d) La función $f(x) = a^x - 1$ es un infinitésimo equivalente a $g(x) = x$, en $x = 0$, porque:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = 1$$

Actividad N°6: Determina el orden infinitesimal comparando todos los infinitésimos hallados en la actividad 5 en el valor de x indicado. (Deberán analizar todas las parejas de infinitésimos obtenidos)

IMPORTANTE

Teoría adicional

Además de los conceptos trabajados en esta guía, en las actividades de evaluación se tendrán en cuenta los siguientes conceptos teóricos, por lo que recomendamos completen sus apuntes y los estudien para realizar las consultas de ser necesario:

- Enunciados, demostraciones e interpretaciones de infinitésimos y sus propiedades.
- Orden infinitesimal, interpretación y ejemplos