TRABAJO PRÁCTICO N°16: LÍMITES CON FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS, INDETERMINACIONES 1^{∞}

En esta guía trabajaremos con límites de funciones trigonométricas, potenciales y exponenciales, así como los pasos que deberemos realizar para salvar indeterminaciones.

Límites a funciones trigonométricas

En las funciones trascendentes, en particular las funciones trigonométricas, para calcular el límite en un punto en el que está definida, basta evaluarla en dicho punto.

Ejemplo: Analiza la existencia de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to \pi} \cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$

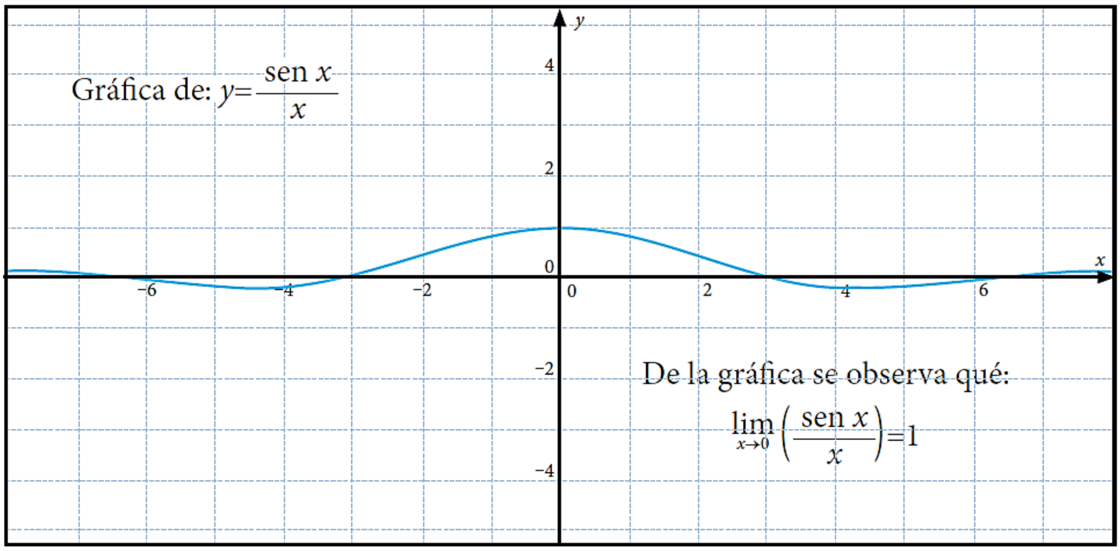
c) $\lim\limits_{x \to 1} \tan(x^2 - 1) = \tan(0) = 0$

Nota: Si el valor numérico se realiza con calculadora, debes recordar poner en Modo RAD (radianes, unidad en el sistema de medición circular)

Si queremos analizar lo que ocurre en el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x}$$

Está función no está definida en cero, por eso no se puede calcular el límite evaluando directamente. Sin embargo, con un procesador podemos construir la gráfica y tabla siguientes:



Si confeccionamos la tabla de valores:

x	-3.0	-2	-1	0	0.5	1	2	3	4
$y=(1/x)\sin(x)$	0.047	0.4546	0.8415	Error	0.9700	0.8415	0.4546	0.047	0.01744

La tabla y la gráfica anteriores permiten inferir que, al aproximarnos a cero tanto por la izquierda como por la derecha, los valores de la expresión se acercan a 1. Por lo tanto:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(x)}{x}=1}$$

Es por todo lo anterior, que los pasos para llegar al límite de manera intuitiva no son válidos, tenemos la necesidad de utilizar métodos de resolución algebraicos.

Cuando estudiamos el concepto de infinitésimo, vimos dentro los órdenes infinitesimales, infinitésimos equivalentes. Henos demostrado teóricamente:

Límite fundamental trigonométrico: $\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}=1$

Límite importante y útil para calcular límites indeterminados.

De manera similar al anterior, se demuestra que:

$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1$ y sus funciones recíprocas: $\lim_{x\to 0}\frac{x}{senx}=1$

Actividad N°1: Utiliza una herramienta para graficar funciones y evaluar el límite $\lim_{x\to 0}\frac{sen(nx)}{x}$ para diferentes valores de *n*. ¿Qué se observa? Redacta una conclusión, o generalidad que se puede establecer.

En los próximos ejemplos, aplicaremos las propiedades del límite e infinitésimos equivalentes:

Ejemplo 1:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(2x)}{x}=\frac{0}{0}$$

Límite indeterminado 0/0

SOLUCIÓN: Cómo no podemos aplicar inmediatamente la ley del cociente, ya que el límite del denominador es 0. El método algebraico que utilizaremos será la sustitución de variable y límite fundamental:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(2x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\text{sen}(2x)}{2x}\right)$$

Multiplicamos y dividimos por 2 (coeficiente del argumento)

$$= \lim_{x\to 0} 2 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}$$

Aplicamos propiedad de límite del producto y límite de 2 es 2.

$$= 2 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x} =$$

Si sustituimos 2x =z. Resulta: $\lim_{x\to 0} z = \lim_{x\to 0} 2x = 0$

$$= 2 \cdot \lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z} = (2)(1)=2.$$

Aplicamos infinitésimos equivalentes y calculamos.

En la práctica omitimos la escritura de la sustitución, pero hay que tener presente que ese es el proceso real.

Ejemplo 2:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x\cdot(x+1))}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(x\cdot(x+1))}{x\cdot(x+1)} \cdot (x+1)\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x\cdot(x+1))}{x\cdot(x+1)} \cdot \lim_{x\to 0} (x+1) = 1 \cdot 1 = 1$$

Ejemplo 3:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{(x-1)(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{(x-1)} \cdot \lim_{x\to 1} \frac{1}{(x+1)} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

__**Actividad N° 2:**__ Demuestra que:

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0.}$$

Recuerda identidad trigonométrica: $sen^2x = 1 - cos^2x = (1+cosx)(1-cosx)$

__**Actividad N° 3:**__ Resuelve los siguientes límites aplicando el concepto de infinitésimos equivalentes:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{sen(5x)}{x} =$ b) $\lim_{x\to 0} \frac{sen(5x)}{sen(3x)} =$ c) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-cosx} =$ d) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2\, sen\, 3x}{tg^3 2x} =$

e) $\lim_{x\to 0} \frac{sen\,(a+x) - sen(a-x)}{x} =$ f) $\lim_{x\to 0} \frac{sen\,(2x).tg(8x)}{x+x^2} =$ g) $\lim_{x\to 2} \frac{tg(x-2)}{\sqrt{5x+6}-4} =$

__**El número *e* o Número de Euler**__

Sea la siguiente sucesión: $(a_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, si hallamos los términos de la sucesión para n cada vez más grandes, como lo muestra la siguiente tabla:

n	1	2	5	10	100	1000	10000
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	2	2.25	2.48832	2.5937425	2.70481383	2.71692393	2.71814593

Podemos ver que la sucesión es monótona creciente y podemos asegurar que está acotada inferiormente, el ínfimo y mínimo resultan $a_1 = 2$. Y la sucesión converge al supremo de la sucesión, que es el número e. El cual se define de la siguiente manera:

$$\boxed{\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

"e" es un número irracional y sus primeras cifras decimales, son $e = 2.71828182846...$

Es válida la definición del número e de la siguiente manera:

Si tomamos $x = \frac{1}{n}$ resulta la siguiente expresión:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e}$$

De manera general, podemos definir a e ***:***

$$e = \lim_{x\to a}\left(1+g(x)\right)^{1/g(x)} \quad \text{si} \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0 \quad \text{ó}$$

$$\boxed{*} \qquad e = \lim_{x\to a}\left(1+\frac{1}{g(x)}\right)^{g(x)} \quad \text{si} \quad \lim_{x\to a} g(x) = +\infty$$

INDETERMINACIONES DEL TIPO 1^∞, 0^0, ∞^0

Este tipo de indeterminaciones se resuelven aplicando la siguiente propiedad:

$$\mathrm{e} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = \lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t}$$

Ejemplo 1: Si se resuelve el siguiente límite, resulta:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-5}\right)^{3x-1} = 1^\infty$$

Límite indeterminado
1^∞

Para salvar la indeterminación se utilizará el límite:

$$e = \lim_{x \to a}\left(1 + \frac{1}{g(x)}\right)^{g(x)} \quad \text{si} \quad \lim_{x \to a} g(x) = +\infty$$

Por lo tanto, el primer paso consiste en trabajar con la base de la potencia, para obtener la expresión 1+1/t. Hay distintos procedimientos que se pueden aplicar, pueden investigar y elegir el que a ustedes les resulta más sencillo:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-5}\right)^{3x-1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+1}{2x-5}-1\right)^{3x-1} =$$

Sumamos y restamos 1 a la base de la potencia

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{2x-5}\right)^{3x-1}$$

Realizamos la resta de la expresión fraccionaria menos 1.

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x-5}{6}}\right)^{3x-1}$$

Aplicamos la equivalencia: $\frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}}$

$$= \underbrace{\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x-5}{6}}\right)^{\frac{2x-5}{6}}\right]}_{\text{Por * es "}e\text{"}}^{\lim_{x\to\infty}(3x-1)\left(\frac{6}{2x-5}\right)}$$

Multiplicamos y dividimos al exponente, por la expresión fraccionaria que se encuentra en la base: $\frac{2x-5}{6}$

$$= e^{\lim_{x\to\infty}\frac{(3x-1)6}{2x-5}} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{18x-6}{2x-5}} = e^{\frac{18}{2}} = e^{9}$$

El límite de la base define a e, por propiedad de límite de una potencia aplicamos límite al exponente.

Ejemplo 2: Si se resuelve el siguiente límite, resulta:

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}} = 1^{\infty}$$

Se indetermina, entonces se busca llegar a la definición de e, por lo que se multiplica y divide por 2 al exponente, para luego aplicar las propiedades de potencias:

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^{2} = \left[\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^{2} = e^{2}$$

<u>**Actividad N° 4**</u>: Resuelve los siguientes límites:

$a)\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x} =$ $\quad b)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x} =$ $\quad c)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1} =$ $\quad d)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-2}\right)^{-2x+\frac{5}{3}} =$