TRABAJO PRÁCTICO N°14: LÍMITES INFINITO Y EN EL INFINITO INDETERMINACIÓN ∞/∞ - ASÍNTOTAS A CURVAS PLANAS

Ejemplos de funciones racionales:

$$f(x) = \frac{k}{x} \qquad h(x) = \frac{x-3}{x^2-1} \qquad g(x) = \frac{x^2+5x+6}{x-\sqrt{2}}$$

Graficar las funciones racionales suele ser más complicado que la gráfica de funciones polinómicas, porque una tabla de valores, la determinación de los ceros o de los puntos de intersección con los ejes coordenados resultan insuficientes. De ahí que se requiera de otros datos que nos brinda la función como ser el de ***asíntotas.***

Nuestro estudio se centrará en las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

Intuitivamente podemos decir que una asíntota de una función $f(x)$ es una recta cuya distancia a la curva tiende a cero, y esto puede ocurrir cuando x tiende a infinito positiva o negativamente ($x \to \pm\infty$), o bien cuando x tiende a un punto c ($x \to c$).

Es importante que previamente veamos los siguientes conceptos:

LÍMITES INFINITOS

Sea la función $f(x) = 1 + \frac{4}{x}$, analizamos el comportamiento de la función cuando x tiende a 0.

Confeccionamos la siguiente tabla de valores para ver qué ocurre con las imágenes de la función cuando x tiende a cero:

x	f(x)	$\lvert f(x)\rvert$
-0,1	-39	39
-0,01	-399	399
-0,002	-1999	1999
-0,0004	-9999	9999
0	∄	∄
0,0002	20001	20001
0,004	1001	1001
0,1	41	41

Podemos observar que, independientemente de la existencia de la imagen en x=0, a medida que los valores de x tienden a 0, las imágenes, en valor absoluto, se hacen cada vez más grandes. Esta idea se representa con el símbolo ∞.

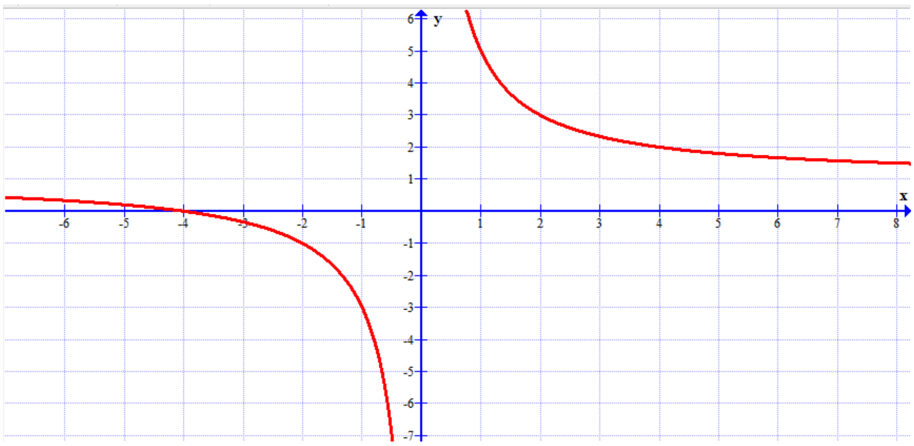
En otras palabras, si los x están en el entorno reducido de centro 0 y radio δ, sus imágenes en valor absoluto, se hacen tan grandes como se quiera de modo que, si se elige que las mismas superen un cierto número M, deberemos encontrar el radio adecuado del entorno para que se cumpla lo pedido. Simbólicamente se expresa: $\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{4}{x}\right) = \infty$

Si se analiza cómo se comporta la función cuando x crece indefinidamente veremos qué ocurre con las imágenes cuando x tiende a infinito. Confeccionamos la siguiente tabla de valores:

x	f(x)
100	0,04
1000	1,004
10000	1,0004
100000	1,00004
1000000	1,000004

Es posible observar que a medida que tomamos valores de x cada vez más grandes como se quiera, sus imágenes se aproximan cada vez más a 1. Decimos, entonces que f(x) tiende a 1 cuando x tiende a infinito.

Se simboliza $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)=1$

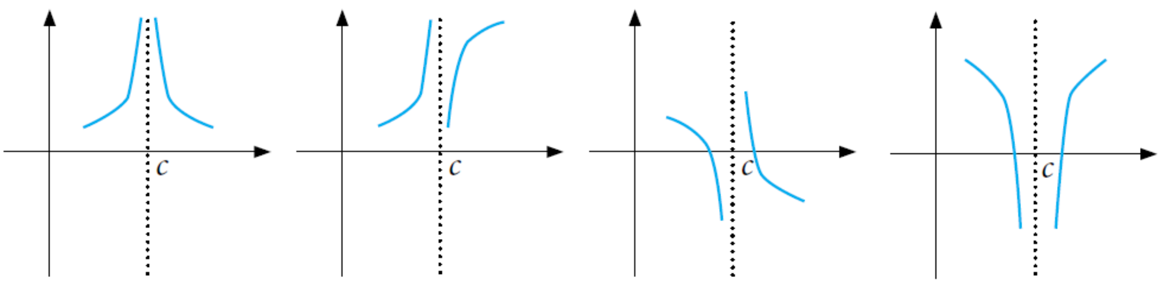


Desde el gráfico podemos observar que la función posee Asíntota Vertical en x = 0 (es el valor al que tiende x cuando el límite es infinito) y tiene Asíntota Horizontal en y = 1 (es el valor del límite de la función cuando x tiende a ∞)

A continuación, formalizaremos las definiciones de cada uno de los límites donde interviene el símbolo infinito.

- ***<u>Límite infinito para x tendiendo a un número real</u>***

En muchas funciones, cuando x tiende a un punto "c" por la izquierda o por la derecha, el valor de $f(x)$ no se aproxima a ningún número real sino que se hace cada vez más grande o cada vez más pequeño, como podemos ver en los siguientes ejemplos:

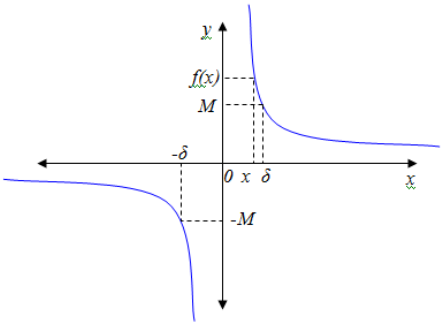


$f(x)\to\infty$ $x\to c$ — $f(x)\to\pm\infty$ $x\to c$ — $f(x)\to\pm\infty$ $x\to c$ — $f(x)\to-\infty$ $x\to c$

Para establecer que tan grande es el valor que toma la función, se fija un valor arbitrario M, suficientemente grande, de tal manera que si x se acerca a un valor c por derecha y por izquierda ($0<|x-c|<\delta$), y se verifica que $f(x)>M$, entonces decimos que $\lim_{x\to c} f(x)=+\infty$ y de manera análoga si $f(x)<-M$, entonces $\lim_{x\to c} f(x)=-\infty$.

Definición:

$$\lim_{x\to c} f(x)=\infty \iff \forall M>0, \exists \delta>0 \ / \ \forall x:\left(x \in Df \ \wedge \ 0<|x-c|<\delta \Rightarrow |f(x)|>M\right)$$

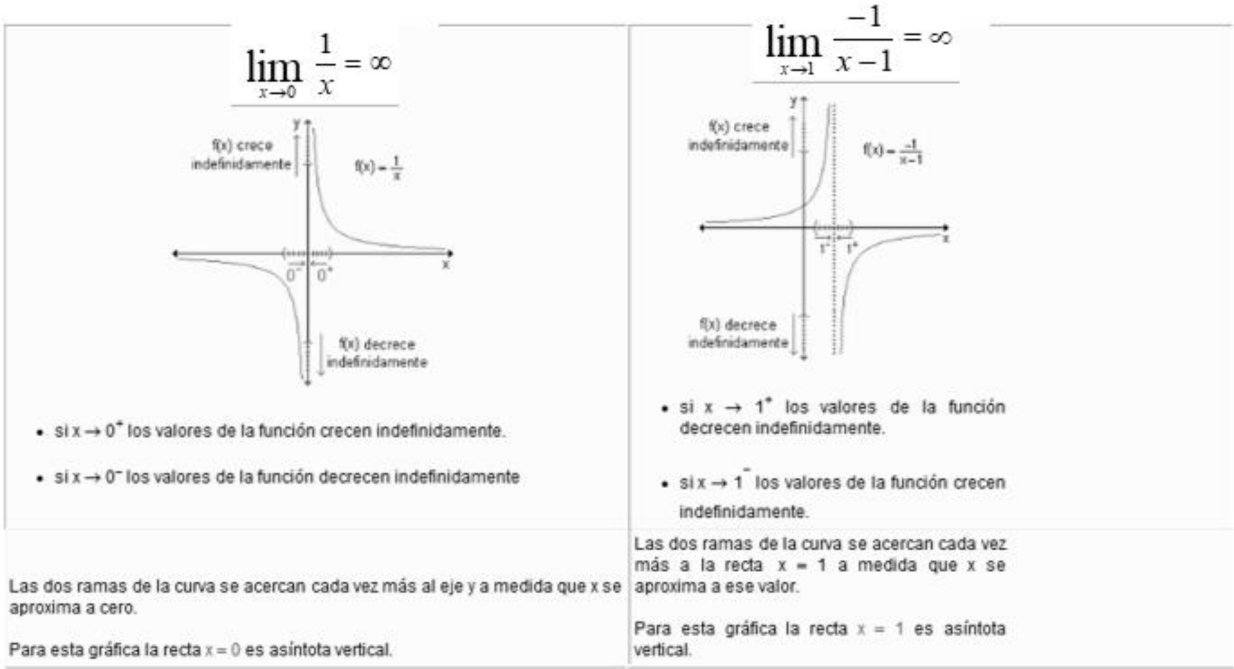


Gráficamente vemos que cuando x se aproxima a 0 resulta $|f(x)|>M$, en valor absoluto, pués por izquierda $f(x)<-M$ y por derecha $f(x)>M$.

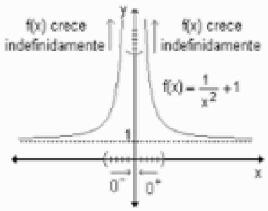
De lo anterior podemos concluir:

Si existe un número $c \in \mathrm{Dom}\, f$, tal que $\lim_{x\to c} f(x)=\pm\infty$, entonces, la recta "$x = c$" es una asíntota vertical de la gráfica de la función.

Ejemplos:



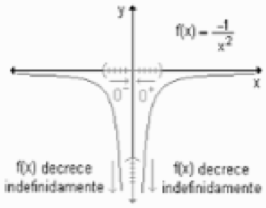
$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$



- si $x \to 0^+$ los valores de la función crecen indefinidamente.
- si $x \to 0^-$ los valores de la función crecen indefinidamente.

Para esta gráfica la recta $x = 0$ es asíntota vertical.

$$\lim_{x \to 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty$$



- si $x \to 0^+$ los valores de la función decrecen indefinidamente.
- si $x \to 0^-$ los valores de la función decrecen indefinidamente.

Para esta gráfica la recta $x = 0$ es asíntota vertical.

<u>Actividad N° 1</u>: Verificar, usando la definición que $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2}{x-1} = \infty$, con M=$10^6$

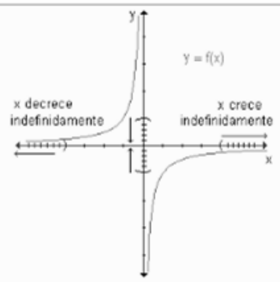
<u>Actividad N° 2</u>: Dadas las siguientes funciones, encontrar los límites y asíntotas verticales:

$a) \lim\limits_{x \to ?} \frac{x+2}{x-3}$ $\quad$ $b) \lim\limits_{x \to ?} \frac{1}{x^2-16}$ $\quad$ $c) \lim\limits_{x \to ?} \frac{x^2+3}{x-8}$

<u>LÍMITES EN EL INFINITO</u>

- ***<u>LÍMITE FINITO PARA x TENDIENDO A INFINITO</u>***

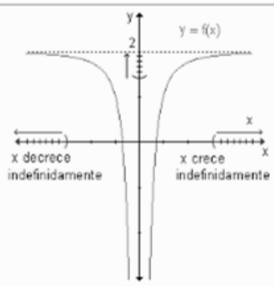
En los siguientes ejemplos vemos el comportamiento de una función cuando x crece o decrece indefinidamente:



a) Si x crece indefinidamente la función f(x) se acerca a 0.

b) Si x decrece indefinidamente, los valores de la función se acercan a 0.

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal de la función.



a) Si x crece indefinidamente la función f(x) se acerca a 2.

b) Si x decrece indefinidamente, los valores de la función se acercan a 2.

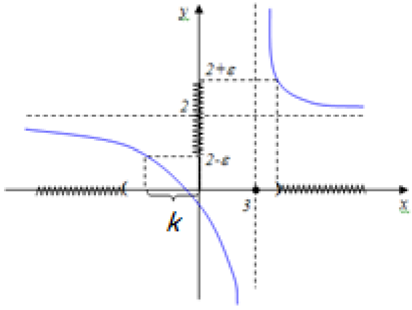
La recta $y = 2$ es asíntota horizontal de la función.

En el primer gráfico vemos que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ y en el segundo, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$

El comportamiento de funciones que se aproximan a un número cuando la variable x crece o decrece indefinidamente, podemos establecer un valor k suficientemente grande de manera que podamos indicar que x tiende a infinito de la siguiente manera: x > +k ó x < - k, de esta manera se define límite finito para x tendiendo a infinito:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists K > 0 \,/\, \forall\, x \in Df \wedge |x| > K \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

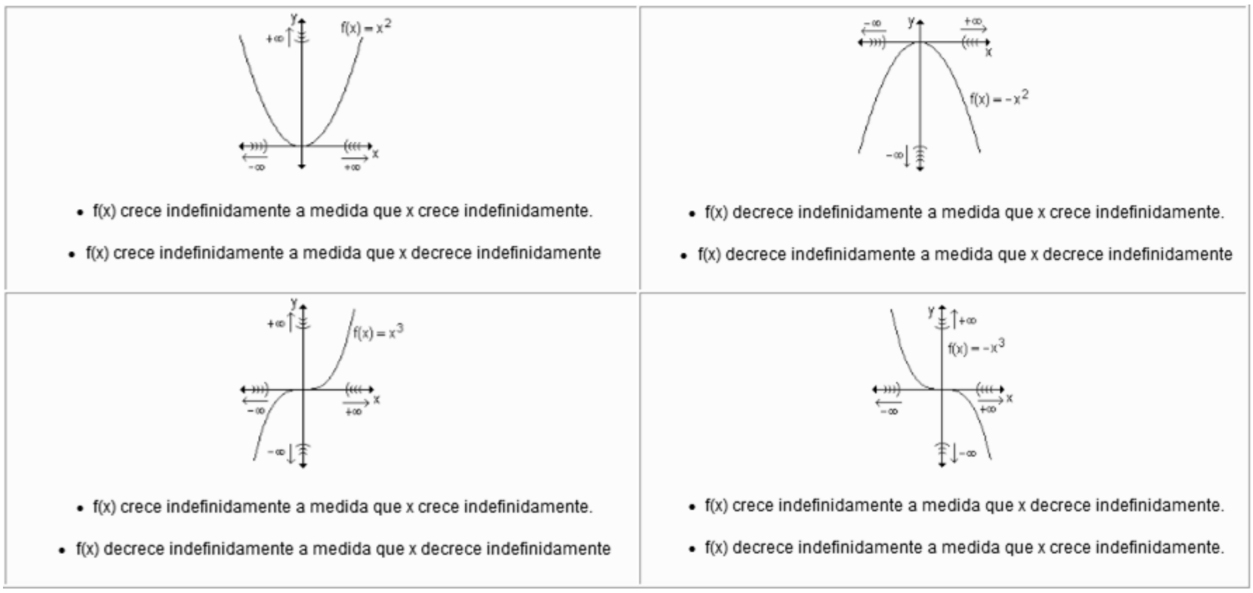
Ejemplo: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+1}{x-3} = 2 \;\wedge\; \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x+1}{x-3} = 2$



Si existe un número "$x \in Dom\, f$" tal que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b$, entonces, la recta "$y = b$" es una asíntota horizontal de la gráfica de la función.

- **LÍMITES INFINITOS EN EL INFINITO**

En los siguientes ejemplos vemos el comportamiento de una función que crece o decrece infinitamente, cuando x crece o decrece indefinidamente:



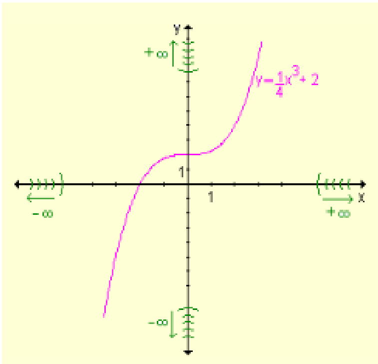
Estas funciones presentan comportamientos que pueden definirse con la simbología de límite infinitos y en el infinito. Por lo tanto, debe extenderse dicho concepto para interpretar y simbolizar estas situaciones.

Luego: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists k > 0/ \forall x \in D_f \wedge |x| > K \Longrightarrow |f(x)| > M$

Ejemplo: Sea: $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + 2$, analizar el comportamiento de *f(x)* cuando x $\to +\infty$ y x $\to -\infty$

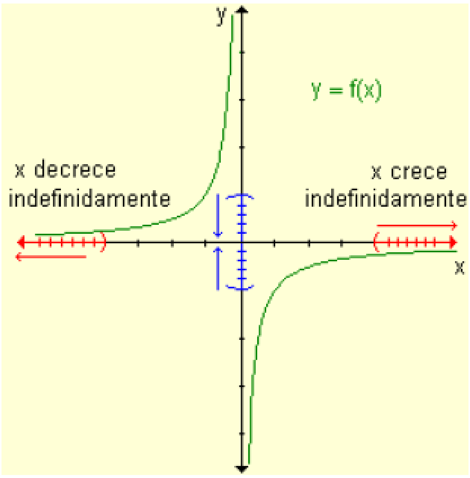
$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\, x^3 + 2\right) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{4}\, x^3 + 2\right) = -\infty,$$

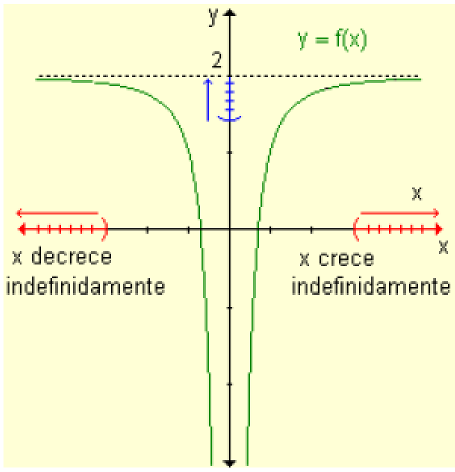


Actividad N° 3: Indicar la expresión del límite que se muestra en cada gráfico:

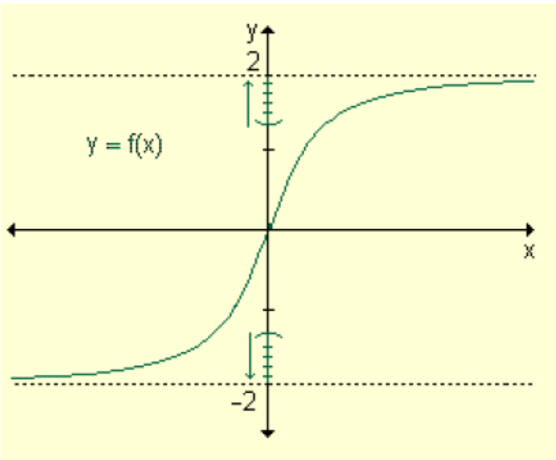
a)



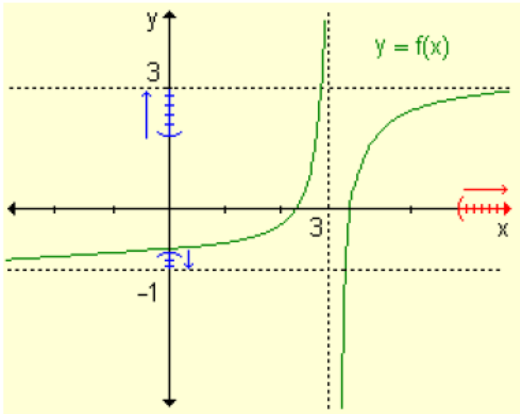
b)



c)



d)



Actividad N° 4: Establecer a qué gráfica corresponde cada definición particular de límites infinitos o en el infinito. Justificar la respuesta.

a) $\forall\, \varepsilon > 0, \exists K > 0 \,/\, \forall\, x \in Df \wedge x > K \Rightarrow \left| f(x) - L \right| < \varepsilon$

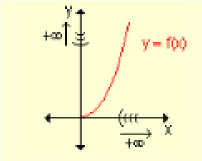
b) $\forall\, \varepsilon > 0, \exists K > 0 \,/\, \forall\, x \in Df \wedge x < -K \Rightarrow \left| f(x) - L \right| < \varepsilon$

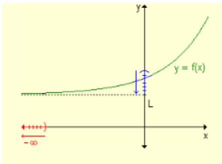
c) $\forall M > 0, \exists K > 0 \,/\, \forall x \in Df \wedge x > K \Rightarrow f(x) < -M$

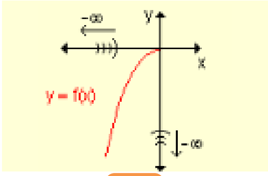
d) $\forall M > 0, \exists K > 0 \,/\, \forall x \in Df \wedge x < -K \Rightarrow f(x) < -M$

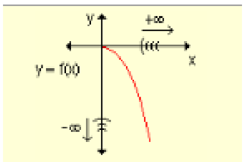
e) $\forall M > 0, \exists K > 0 \,/\, \forall x \in Df \wedge x > K \Rightarrow f(x) > M$

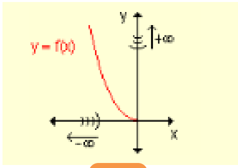
f) $\forall M > 0, \exists K > 0 \,/\, \forall x \in Df \wedge x < -K \Rightarrow f(x) > M$

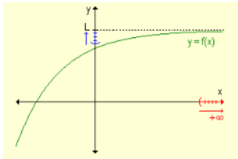












INDETERMINACIONES DEL TIPO $\frac{\infty}{\infty}$

Aparecen al calcular límites de cocientes de funciones polinómicas o irracionales.

Método para salvar la indeterminación:

1º. El primer paso consiste en encontrar en la función dada, la variable elevada al mayor exponente.

2º. Posteriormente se dividen todos y cada uno de los términos por la variable elevada al mayor exponente.

3º. Por último, se sustituye el límite con el fin de igualar a 0 todos los términos que difieren de la variable más grande, dejando sólo aquellos términos de la función que contaban originalmente con dicha variable. Es decir, el resultado será la razón entre los coeficientes de la variable elevada al mayor exponente.

Nota: los límites de funciones para x tendiendo a infinito, se resuelven de igual manera que en el límite de sucesiones.

Ejemplo 1: Determinar el límite de:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2 - 3}{4x^2 - 2}$$

Como la variable elevada al mayor grado en la función es x^2, dividimos cada término por ella.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5x^2}{x^2} - \frac{3}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2} - \frac{2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{5 - \frac{3}{x^2}}{4 - \frac{2}{x^2}}$$

Sustituimos:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5 - \frac{3}{\infty}}{4 - \frac{2}{\infty}}$$

Por la regla del recíproco de la potencia sabemos que: $\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{3}{x^2}\right)=0$ y $\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{2}{x^2}\right)=0,$

Así, resulta: $\lim_{x\to\infty}\frac{5-0}{4-0}=\frac{5}{4}.$

Por lo tanto: $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-3}{4x^2-2}=\frac{5}{4}$

Actividad N° 5: Resolver los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{x^2-2x}=$ b) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+x^2+x}{x^2-2x}=$ c) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2+x}{x^4-2x}=$

Actividad N° 6: Dadas las siguientes funciones, encontrar, si existen, las asíntotas verticales y horizontales. Representar gráficamente la función y sus asíntotas.

$f(x)=\frac{4x}{x+4}$ $g(x)=\frac{1-x}{x^2+4x+4}$ $h(x)=\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

Ejemplo 2: Determinar el límite de la siguiente función irracional:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+3}}{5x-2}$$

El exponente de mayor grado en este ejemplo es ***x***, no ***x*** ², ya que ésta se encuentra bajo la raíz. Entonces:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{4x^2}{x^2}+\frac{3}{x^2}}}{\frac{5x}{x}-\frac{2}{x}}$$

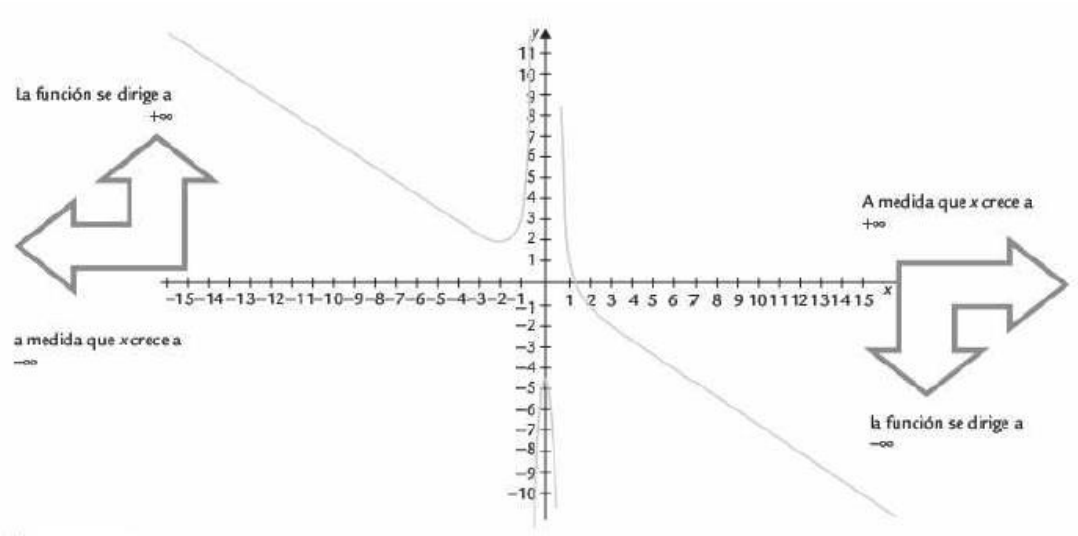
Por lo tanto: $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4+0}}{5-0}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4}}{5}=\frac{2}{5}$

Actividad N° 7: Evaluar los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+9}}{x+9}=$ b) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{3x^2+2}}=$ c) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x-\sqrt[3]{8x^3-2x}}{\sqrt{3x^2+2}}=$

ASÍNTOTAS OBLICUAS

Observar el comportamiento de la siguiente función: $f(x)=\frac{-2x^3+4}{3x^2-1}$



Si una función se aproxima infinitamente a una recta oblicua cuando la variable independiente tiende a infinito, decimos que la función tiene **ramas infinitas oblicuas hiperbólicas**. Estas ramas se aproximan a una recta que se llama **asíntota oblicua**.

- La recta de ecuación $y = mx + n$ $(m \neq 0)$, es asíntota oblicua del gráfico de una función *f(x), si y sólo si* $\lim_{x\to\infty}[f(x) - (mx + n) = 0]$, donde la pendiente m y la ordenada al origen n pueden obtenerse mediante los siguientes límites:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad n = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx]$$

Actividad N° 8: Aplicando definición, encontrar las asíntotas de las siguientes funciones y graficar:

a) $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ *b)* $f(x) = \frac{5x^2 - x}{x-1}$ *c)* $f(x) = \frac{x^3+x}{x^2-1}$

Ejercicio integrador:

Dada la función $f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2(x-1)}$, determinar:

a) Dominio e Imagen.
b) Raíz de la función.
c) Ordenada al origen.
d) Asíntotas, por definición.
e) Con todos los datos obtenidos, representarla gráficamente.