Unidad Temática IV:

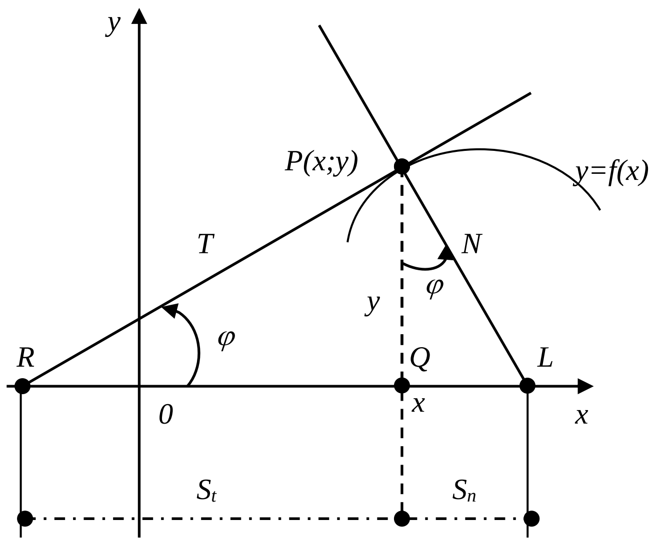
Aplicaciones del Cálculo Diferencial

Tangente. Normal. Subtangente y Subnormal

Con las notaciones de la figura, se llama tangente T al segmento $\overline{RP}$ de tangente comprendido entre el punto $P(x;y)$ y el eje de abscisas, y normal N, al segmento $\overline{PL}$ de normal, comprendido entre $P(x;y)$ y el eje de las abscisas.

Las proyecciones de estos segmentos sobre el eje de abscisas se denominan, respectivamente, Subtangente: S_t y Subnormal: S_n: $S_t = RQ;\ S_n = QL$.

Si φ es el ángulo que forma la recta tangente con el eje de las abscisas, el ángulo $Q\hat{P}L$ será igual a φ, por tener ambos el mismo complemento. Por ser: $tg\,\varphi = y'$, resulta: $y' = tg\,\varphi = \dfrac{y}{S_t} \Rightarrow S_t = \dfrac{y}{y'}$ $y' = tg\,\varphi = tg\,Q\hat{P}L = \dfrac{S_n}{y} \Rightarrow S_n = y\,.\,y'$.



Aplicando el Teorema de Pitágoras, resulta:

$$T = \sqrt{RQ^2 + PQ^2} = \sqrt{S_t^2 + y^2} = \sqrt{\frac{y^2}{y'^2} + y^2} = \frac{y}{y'}\,.\sqrt{1+y'^2} = S_t\,\sqrt{1+y'^2}$$

$$N = \sqrt{PQ^2 + QL^2} = \sqrt{S_n^2 + y^2} = \sqrt{y^2.\,y'^2 + y^2} = y\,.\sqrt{1+y'^2}.$$

Variación de Funciones

Funciones Crecientes y Decrecientes

Funciones Crecientes

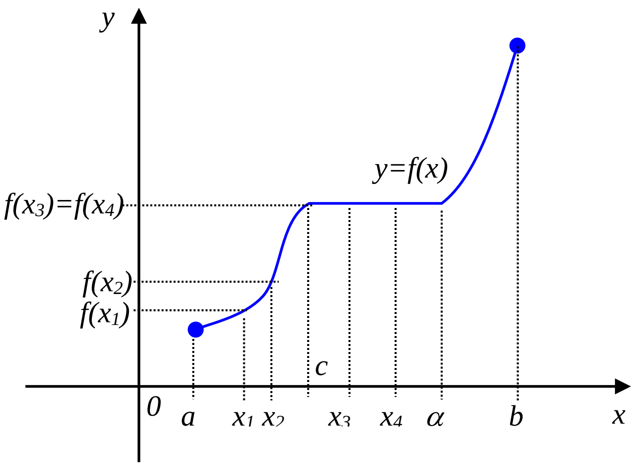
(a) En sentido amplio

Sea: $y = f(x)$, con $Df \subseteq \mathbb{R}$

$f(x)$, función creciente en sentido amplio en $Df \Leftrightarrow \forall\, x_1, x_2 \in Df$:
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

Por ejemplo: Sea: $y = f(x)$, donde: $Df = (a;b)$. Sí $f(x)$ es creciente en sentido amplio en el $(a;b)$, se tendrá: $\forall\, x_1, x_2 \in (a;b) : x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \geq 0$.

Luego: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$. Vale decir que si una función es creciente en sentido amplio en un $(a;b)$, todo cociente incremental es positivo en sentido amplio en dicho intervalo. La recíproca es evidentemente cierta, por lo que la condición $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$ es necesaria y suficiente.



(b) En sentido estricto

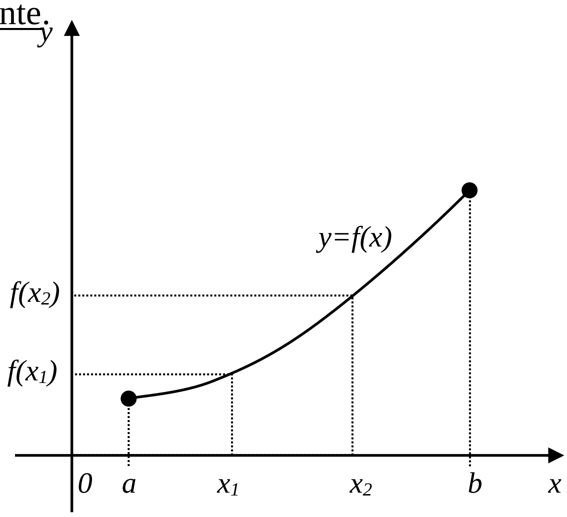
Sea la función: $y = f(x)$, con $Df \subseteq \mathbb{R}$

$f(x)$, función creciente en sentido estricto o estrictamente creciente en $Df \Leftrightarrow \forall\, x_1, x_2 \in Df$:
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Ejemplo: Sea: $y = f(x)$, con: $Df = (a;b)$. Sí $f(x)$ es estrictamente creciente en el $(a;b)$, se tendrá: $\forall\, x_1, x_2 \in (a;b) : x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0$.

Luego: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$.

Es decir que si una función es estrictamente creciente en un $(a;b)$, todo cociente incremental es estrictamente positivo en dicho intervalo. La recíproca también es cierta, por lo que la condición $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}>0$ es necesaria y suficiente.



Funciones Decrecientes

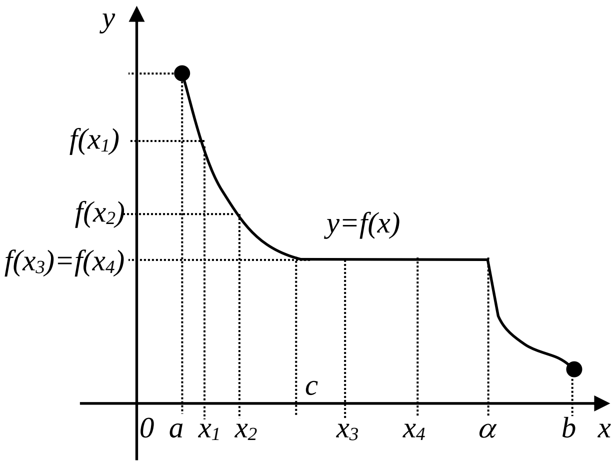
(a) En sentido amplio

Sea: $y=f(x)$, con $Df\subseteq\mathbb{R}$

$f(x)$, función decreciente en sentido amplio en $Df \Leftrightarrow \forall\, x_1, x_2\in Df$: $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\geq f(x_2)$

Ejemplo: Sea: $y=f(x)$, donde: $Df=(a;b)$. Sí $f(x)$ es decreciente en sentido amplio en el $(a;b)$, se tendrá: $\forall\, x_1,x_2\in(a;b): x_2-x_1>0 \Rightarrow f(x_2)-f(x_1)\leq 0$.

Luego: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leq 0$. Si una función es decreciente en sentido amplio en un $(a;b)$, todo cociente incremental es negativo en sentido amplio en dicho intervalo. La recíprocas también es cierta, por lo que la condición $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\leq 0$ es necesaria y suficiente.



(b) <u>En sentido estricto</u>

Sea la función: $y = f(x)$, con $Df \subseteq \mathbb{R}$

$f(x)$, <u>función decreciente en sentido estricto o estrictamente decreciente</u> en $Df \Leftrightarrow \forall\, x_1, x_2 \in Df$:
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

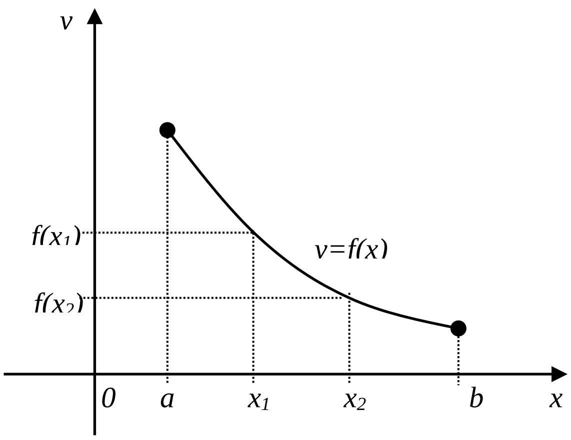
<u>Ejemplo</u>: Sea: $y = f(x)$, donde: $Df = (a;b)$. Sí $f(x)$ es estrictamente decreciente en el $(a;b)$, se tendrá:

$$\begin{array}{r} \forall\, x_1, x_2 \in (a;b) : x_1 < x_2 \\ x_1 - x_2 > 0 \end{array} \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) < 0$$

Luego: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$. $\quad x_2 - x_1 > 0$

Es decir que si una función es estrictamente decreciente en un $(a;b)$, todo cociente incremental es estrictamente negativo en dicho intervalo. La recíproca también es cierta, por lo que la <u>condición</u> $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} < 0$ es <u>necesaria y suficiente</u>.

Si la función es estrictamente creciente o estrictamente decreciente en Df , se dirá que se trata de una función "**<u>estrictamente monótona</u>**".



<u>Funciones Crecientes y Decrecientes en un punto</u>

(a) <u>Función Creciente en un punto</u>

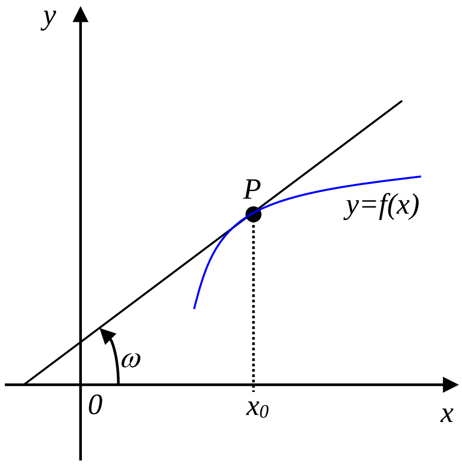
Sea el punto $x_0 \in Df$. Se dice que la función es creciente en x_0, si existe un número real estrictamente positivo $\delta\ /\ \forall\, x$ que cumpla la condición: $0 < \Delta x < \delta$ se verifique que:

$$f(x_0 - \Delta x) < f(x_0) < f(x_0 + \Delta x)$$

En símbolos: $f(x)$ es <u>creciente</u> en $x_0 \Leftrightarrow \exists\, \delta > 0\ /\ \forall\, \Delta x : 0 < \Delta x < \delta \Rightarrow f(x_0 - \Delta x) < f(x_0) < f(x_0 + \Delta x)$

O sea, cuando la función es estrictamente creciente en el $E_{(x_0;\delta)} = (x_0 - \delta\, ;\, x_0 + \delta)$.

Resulta evidente que una función estrictamente creciente en un intervalo abierto es creciente en cada uno de sus puntos y viceversa.

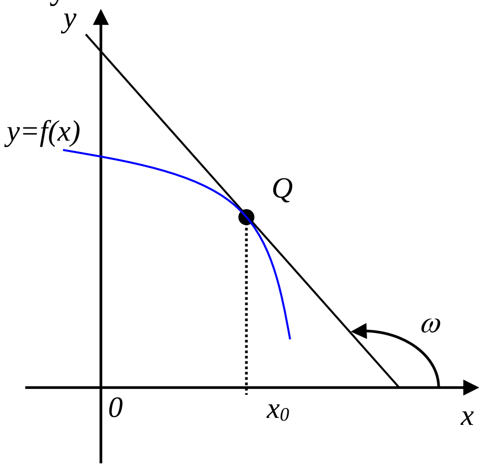


(b) Función decreciente en un punto

$f(x)$, función decreciente en $x_0 \Leftrightarrow \exists\, \delta > 0 \,/\, \Delta x : 0 < \Delta x < \delta \Rightarrow f(x_0 - \Delta x) > f(x_0) > f(x_0 + \Delta x)$.

O sea, cuando la función es estrictamente decreciente en el $E_{(x_0;\delta)} = (x_0 - \delta\,;\, x_0 + \delta)$.

Resulta evidente que una función estrictamente decreciente en un intervalo abierto es decreciente en cada uno de sus puntos y viceversa.



Signo de la derivada primera

Hemos definido anteriormente las funciones crecientes y decrecientes. Apliquemos, ahora, el concepto de derivada al estudio del crecimiento y decrecimiento de funciones.

Teorema: si una función $f(x)$ derivable en el $(a;b)$, es creciente en este intervalo, su derivada en él es no negativa; es decir: $f'(x) \geq 0$.

Demostración: supongamos que $f(x)$ crece en el $(a;b)$, damos un incremento Δx a la variable independiente x, y formamos el cociente incremental: $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. De acuerdo a lo visto, como $f(x)$ es una función creciente:

para: $\Delta x > 0 : \; f(x+\Delta x) \geq f(x)$; y para: $\Delta x < 0 : \; f(x+\Delta x) \leq f(x)$.

En ambos casos: $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geq 0$; tomando límite para $\Delta x \to 0$, tenemos:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geq 0 \text{; es decir: } f'(x) \geq 0.$$

<u>Teorema</u>: si una función $f(x)$ es continua en el $[a;b]$, y derivable en el $(a;b)$, entonces sí $f'(x) \geq 0$, $\forall\, x \in (a;b)$, $f(x)$ es una función creciente en el $(a;b)$.

<u>Demostración</u>: sean x_1 y x_2 dos puntos cualquiera del intervalo, tales que: $x_1 < x_2$, y supongamos: $f'(x) \geq 0$. Entonces, a probar: $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Para ello consideramos un intervalo cerrado: $x_1 \leq x \leq x_2$; puesto que $f(x)$ es derivable, debe ser continua, y entonces por el <u>**Teorema de Weierstrass**</u> debe tener un valor máximo en este intervalo cerrado. Además, por ser $f'(x) > 0$ no puede ocurrir este máximo en ningún punto interior.

Supongamos que el máximo está en x_1, entonces $\forall\, x$ interior al intervalo: $\forall\, x \in (x_1;x_2)$:

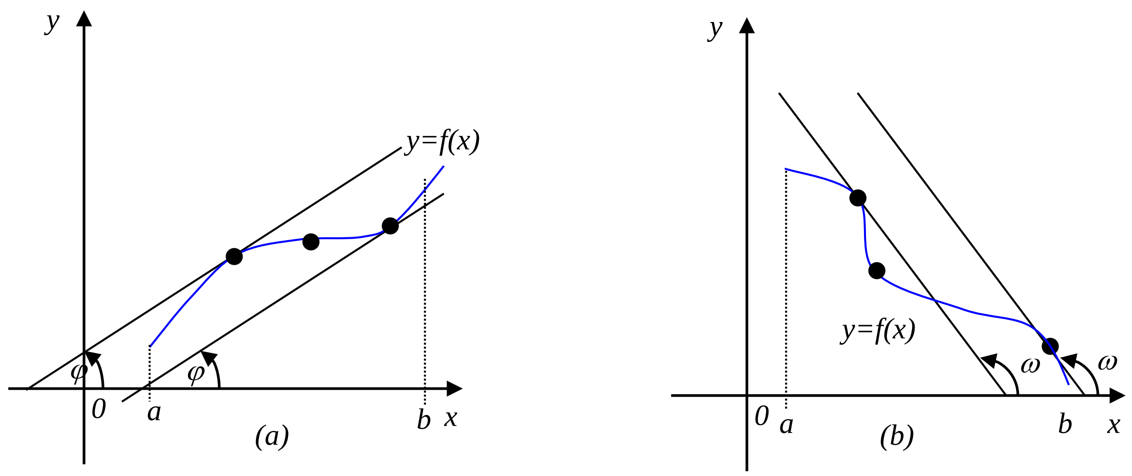
$x > x_1 \Rightarrow x - x_1 > 0$ y $f(x) \leq f(x_1)$ por ser x_1 máximo, definición de máximo, ya se dió en unidad anterior. $f(x) - f(x_1) \leq 0$

Así: $\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq 0$, lo cual implica que $f'(x) \leq 0$. Pero, por hipótesis $f'(x) \geq 0$. Esta contradicción muestra que el máximo debe ocurrir en x_2; es decir: $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Con respecto a las funciones decrecientes, siempre que sean derivables, existe un <u>Teorema</u> análogo que dice:

(a) Si la función $f(x)$ decrece en el $(a;b) \Rightarrow f'(x) \leq 0$ en él.

(b) Si $f'(x) \leq 0$ en el $(a;b)$, la función $f(x)$ es decreciente en el $(a;b)$.



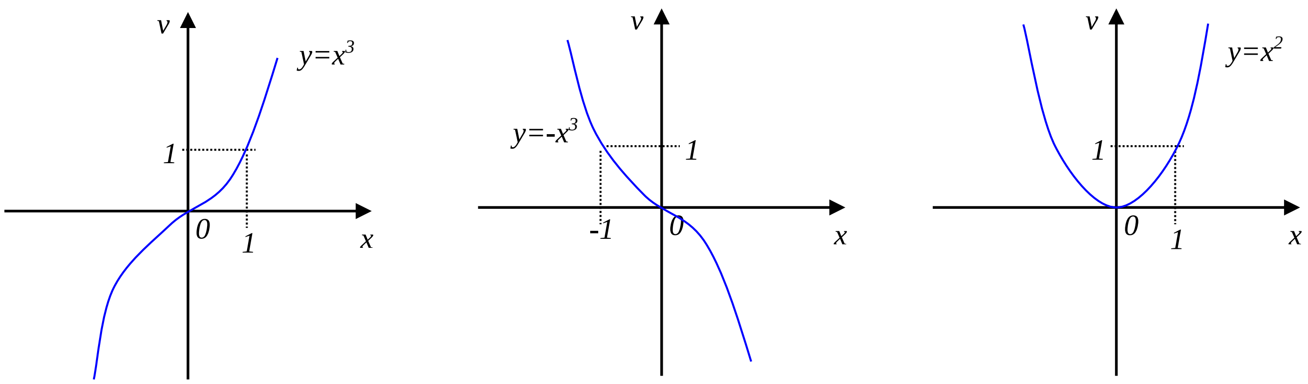
<u>Los Teoremas vistos tienen la siguiente interpretación geométrica</u>

Si la función $f(x)$ es creciente en el $(a;b)$, la tangente a la curva $y = f(x)$, forma con el semieje positivo de las x un ángulo agudo (en algunos casos puede ser paralelo a este eje). La tangente de este ángulo es positiva: $tg\,\varphi = f'(x) \geq 0$. <u>Figura (a)</u>.

Si la función decrece en el $(a;b)$, el ángulo de inclinación de la tangente será obtuso (en algunos puntos la tangente puede ser paralela al eje x).
La tangente de este ángulo será negativa: $tg\,\omega = f'(x) \leq 0$. <u>Figura (b)</u>.

Es decir, de acuerdo a lo visto, los **Teoremas** permiten juzgar sobre el crecimiento o decrecimiento de la función considerada, por el signo de su derivada primera.

<u>Ejemplo</u>: determinar los dominios de crecimiento y decrecimiento de las funciones: $f(x) = x^3$; $g(x) = -x^3$; $h(x) = x^2$



$f'(x) = 3x^2$; $\quad g'(x) = -3x^2$; $\quad h'(x) = 2x$. Obsérvese que:

(a) $f(x)$ es creciente $\forall\, x \geq 0$, puesto que $f'(x) \geq 0$, y además creciente en el origen.
(b) $g(x)$ es decreciente $\forall\, x \geq 0$, puesto que $g'(x) \leq 0$, y además decreciente en el origen.
(c) $h(x)$ es creciente para $x > 0$, puesto que $h'(x) > 0$, y decrece para $x < 0$, pues $h'(x) < 0$, y en el origen $x = 0$, donde $h'(x) = 0$, no creciente ni decreciente.

Por lo tanto, si $f'(x) = 0$ (tangente horizontal) no puede afirmarse nada con respecto al comportamiento de $f(x)$ en x.

<u>Máximos y Mínimos Absolutos o Globales</u>

Sea: $f(x): A \to \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}$, y sea: $x_0 \in A$.
(a) Se dice que la función $f(x)$ tiene en x_0 un <u>máximo absoluto</u>, sí $f(x) \leq f(x_0)$; $\forall\, x \in A$.
Cuando el máximo absoluto es alcanzado en un solo punto, o sea, $f(x) < f(x_0)$; $\forall\, x \in A$, se dirá que el <u>máximo absoluto</u> es <u>estricto</u>.

(b) Se dice que la función $f(x)$ tiene en x_0 un <u>mínimo absoluto</u>, sí $f(x) \geq f(x_0);\ \forall x \in A$.
Cuando el mínimo absoluto es alcanzado en un solo punto, o sea, $f(x) > f(x_0);\ \forall x \in A$, se dirá que el <u>mínimo absoluto</u> es <u>estricto</u>.

<u>Máximos y Mínimos Relativos o Locales</u>

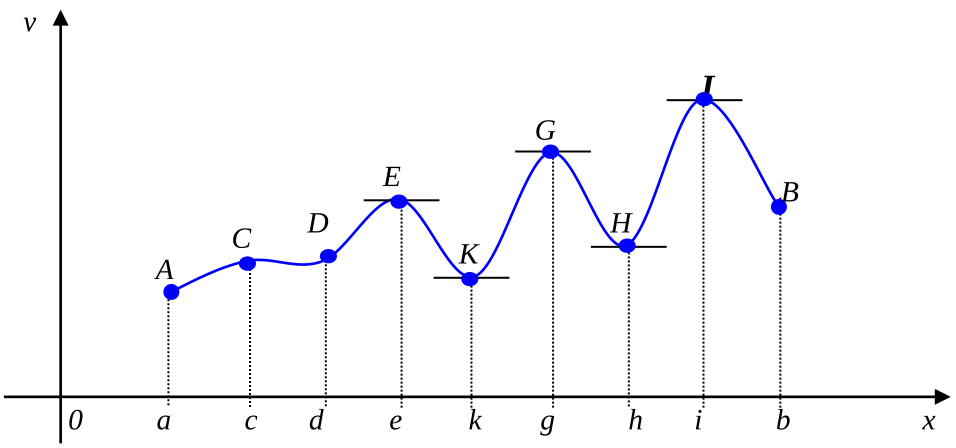
Sea: $f(x): A \to \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}$, y sea: $x_0 \in A$.

(a) Se dice que la función $f(x)$ tiene en x_0 un <u>máximo relativo</u>, si $f(x) \leq f(x_0)\ \forall x$ suficientemente próximo a x_0, es decir si se puede determinar un número real estrictamente positivo $\delta : (\delta > 0) / f(x) \leq f(x_0),\ \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$. Sí $f(x) < f(x_0)$, $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, con $x \neq x_0$, se dirá que el <u>máximo relativo</u> $f(x_0)$ es <u>estricto</u>.
Resulta claro que $f(x_0)$ es el máximo absoluto en el intervalo $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$.

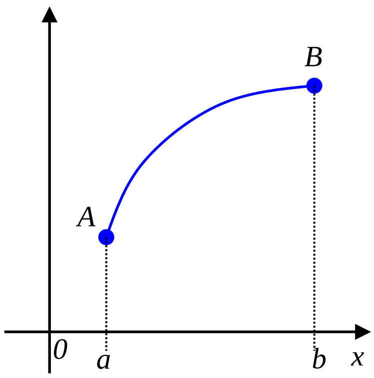
(b) Se dice que la función $f(x)$ tiene en x_0 un <u>mínimo relativo</u>, si $f(x) \geq f(x_0)\ \forall x$ suficientemente próximo a x_0, es decir si se puede determinar un número real estrictamente positivo $\delta : (\delta > 0)\ /\ f(x) \geq f(x_0),\ \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$.

Ahora bien, si: $f(x) > f(x_0),\ \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, con $x \neq 0$, diremos que el <u>mínimo relativo</u> es <u>estricto</u>.
Aquí también resulta claro que $f(x_0)$ es un mínimo absoluto de $f(x)$ en el intervalo $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$.
Digamos que los máximos y mínimos relativos se denominan "**<u>Extremos Relativos</u>**" de la función.

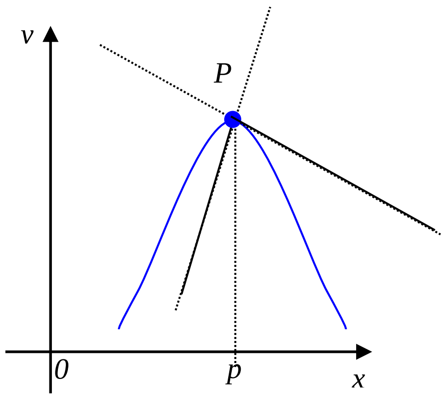
<u>Ejemplos</u>: sean los siguientes gráficos. Observarlos y sacar conclusiones.



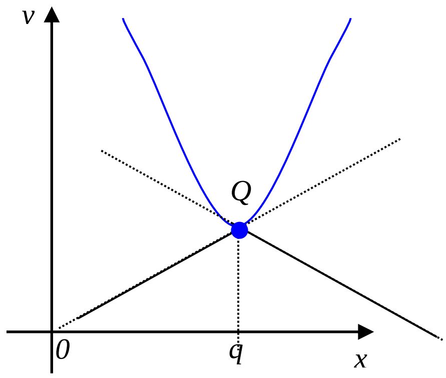
(A)



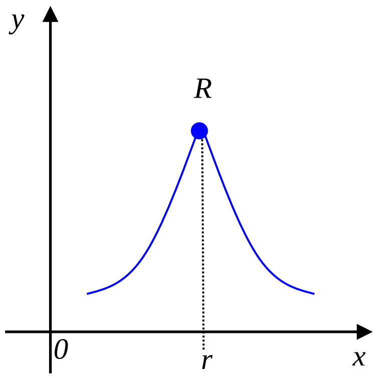
(B)



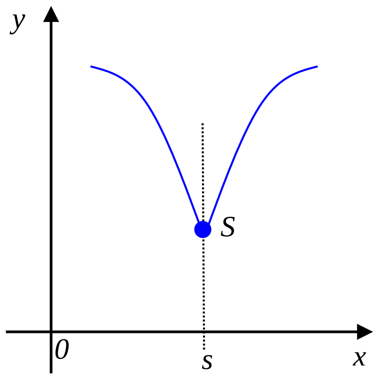
(C)



(D)



(E)



(F)

(a) <u>GRAFICO (A)</u>: la función $f(x)$ tiene en k y en h mínimos relativos estrictos. En c un máximo relativo amplio. En d un mínimo relativo amplio. En los puntos del intervalo $(c;d)$ tienen máximos y mínimos relativos amplios simultáneamente. En a un mínimo absoluto y en i un máximo absoluto, ambos en el intervalo cerrado $[a;b]$.

(b) <u>GRAFICO (B)</u>: la función $f(x)$ no presenta máximos ni mínimos relativos en el intervalo cerrado $[a;b]$.

(c) <u>GRAFICO (C)</u>: la función $f(x)$ presenta en p un máximo relativo estricto.

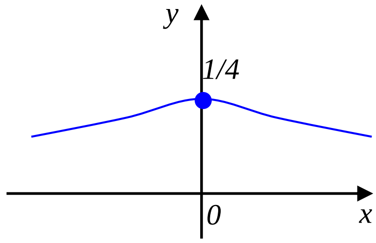
(d) <u>GRAFICO (D)</u>: la función tiene un mínimo relativo estricto en q.

(e) <u>GRAFICOS (E) y (F)</u>: en cada gráfica la función $f(x)$ presenta un máximo y un mínimo relativo estricto en r y s, respectivamente. En particular en estos extremos se puede observar a lo que denominamos "punto anguloso".

De la observación de las figuras (A) y (B) se infiere que una función puede tener (uno o varios) o no extremos relativos en un intervalo. De la figura (A) se desprende asimismo que, un mínimo relativo puede ser mayor que un máximo relativo. También que un extremo relativo no es necesariamente absoluto, y si la función es continua, los máximos y mínimos relativos se presentan alternadamente.

Para encontrar los extremos relativos de una función se puede recurrir a su definición, esto es, investigando los valores que alcanza la función en distintos puntos del dominio. En algunos casos puede resultar sencillo utilizar ese método, como sucede en este ejemplo:

Sea la función: $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4}$; para $x=0$, es: $f(0)=\dfrac{1}{4}$; $\forall\, x\neq 0$, es $f(x)<\dfrac{1}{4}$

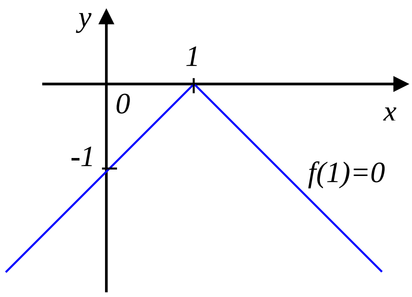


Luego: $f(0)=\dfrac{1}{4}$ es un máximo relativo de $f(x)$, que en este caso en particular, es también máximo absoluto de $f(x)$ en $\mathbb{R}$.

Obsérvese que $f(0)=\dfrac{1}{4}$ es un máximo absoluto en cualquier subconjunto del dominio al cual pertenece el origen. Sin embargo, en la mayoría de las funciones, no es sencillo localizar extremos por comparación de valores.

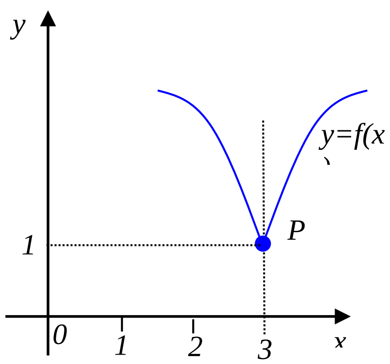
Además, vemos que la derivada de una función se anula en el origen, es decir: $f'(x)=\dfrac{-2x}{\left(x^2+4\right)^2}$ $\wedge$ $f'(0)=0$. Esta circunstancia parece sugerir la idea de que la función alcanza valores extremos en aquellos puntos donde la derivada primera se anula, o sea en aquellos puntos donde el gráfico admite tangente horizontal.

Esta idea no es correcta pues una función puede alcanzar máximo o mínimo local en puntos donde no hay tangente, es decir, en puntos donde la función no es derivable, como sucede con los puntos R y S de los gráficos (E) y (F) vistos anteriormente, o bien como sucede en la función: $f(x)=-|x-1|$, cuyo gráfico es:



$f(1)$ es máximo relativo y absoluto de la función, y además, como podemos ver $\nexists\, f'(1)$.

Consideremos la función: $f(x)=(x-3)^{2/3}+1$



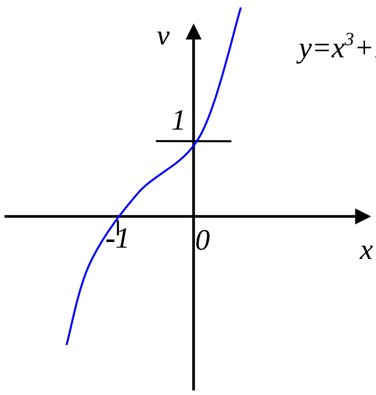
$f(3)$ es un mínimo relativo, y en el punto $P[3; f(3)]$ el gráfico tiene tangente vertical (semi tangente).

Por lo tanto, en este caso, igual que en el ejemplo anterior, la función alcanza un extremo relativo en un punto donde no tiene derivada finita.

También puede suceder que el gráfico tenga tangente horizontal en un punto del mismo y el valor correspondiente de la función no sea máximo ni mínimo relativo, como sucede en la función:

$f(x) = x^3 + 1;\ f'(x) = 3x^2;$ luego: $f'(0) = 0$.

En el punto $(0;1)$ el gráfico tiene tangente horizontal, y sin embargo no hay extremo. De acuerdo a lo ya visto esta función es constantemente creciente en todo el dominio.



Por lo tanto, de todo lo visto podemos concluir que la condición de tener derivada nula en un punto no asegura la existencia de extremo relativo para una función. (<u>Condición necesaria pero no suficiente para la existencia de extremos relativos</u>).

<u>Pero si una función derivable tiene un extremo en un punto interior a su dominio, entonces dicha derivada es nula</u>.

Es decir, la anulación de la derivada es <u>condición necesaria</u> para la existencia de máximo o mínimo, si la función es derivable y el punto correspondiente es interior al dominio de la misma. Esta condición la probaremos mediante el siguiente:

<u>*Teorema*</u>: si una función derivable tiene un máximo o un mínimo relativo en un punto x_0 interior a su dominio, su derivada primera se anula en este punto, es decir: $f'(x_0) = 0$.

Como por hipótesis existe el número real $f'(x_0)$, caben generalmente tres posibilidades: $f'(x_0) \gtreqless 0$

(a) si $f'(x_0) > 0$ de acuerdo a lo visto, la función $f(x)$ será creciente.

(b) si $f'(x_0) < 0$ de acuerdo a lo visto, la función $f(x)$ será decreciente.

Por ende, debe ser $f'(x_0) = 0$, lo que significa geométricamente que la tangente a la curva en el punto considerado es horizontal. Lo recíproco no es cierto como ya lo hemos visto en el caso de la función $f(x) = x^3 + 1$, es decir, que la existencia de una tangente horizontal no implica la existencia de un extremo.

Digamos que los valores de x para los valores $f'(x_0) = 0$ reciben el nombre de "***Valores Críticos Ordinarios***", y los puntos correspondientes del gráfico "***Puntos Críticos Ordinarios***".

Por último, como el problema de localizar extremos es de singular importancia, desarrollaremos criterios que permiten asegurar la existencia de los mismos.

Puntos Críticos de una función

Si bien durante el desarrollo de este tema hemos hablado de puntos críticos, es conveniente dejar perfectamente aclarado que son puntos críticos. Como se ha visto en el ejemplo anterior, al buscar los extremos absolutos de una función continua en el intervalo $[a;b]$, debe considerarse especialmente los valores que alcanza la función en los extremos del intervalo.

Además, si la función que se investiga no es derivable en algún punto, hay que tener en cuenta el valor de la función en dicho punto. La función $f(x) = |x|$, por ejemplo, no es derivable en el origen, no obstante, alcanza en el mismo un mínimo relativo y absoluto.

Por ello, al buscar los extremos absolutos de una función, es importante considerar especialmente los puntos de los distintos tipos mencionados, que son puntos clave en la investigación que se efectúa.

A estos puntos los llamamos Puntos Críticos de la función, sobre los cuales daremos la siguiente:

Definición:

Si $f(x)$ es una función continua definida sobre un intervalo (abierto o cerrado), el punto x_0 es un punto crítico de $f(x)$ en dicho intervalo, si se cumple una de las siguientes condiciones:

(1) x_0 es interior al intervalo y $f'(x)$ existe y es nula en x_0. $\left(f'(x_0) = 0\right)$.
(2) x_0 es interior al intervalo y $f(x)$ no es derivable en x_0. (No hay derivada finita).
(3) x_0 es uno de los extremos del intervalo.

Determinación de Extremos Relativos

Sea la función $y = f(x)$ continua en un cierto intervalo, al cual pertenece un valor crítico x_0, y derivable en todos los puntos del mismo (a excepción, quizás del mismo x_0).

Calculemos su primera derivada $f'(x)$, obtenemos la ecuación $f'(x_0) = 0$, limitándonos a considerar las raíces reales de la misma. Estas raíces serán los valores críticos ordinarios.

Supongamos que x_0 es uno de ellos. A partir de aquí la determinación de los extremos podamos efectuarlos mediante los siguientes criterios.

Criterios para determinar extremos relativos

Ya hemos visto que no basta la anulación de la derivada primera de una función en un punto interior a un conjunto, para asegurar la existencia en dicho punto de un extremo relativo: $f'(x_0)=0$, condición necesaria pero no suficiente para la existencia de un extremo relativo.

Estudio de los valores de la función (Variación de la función)

Si x_0 es un punto interior al Dominio de una función $f(x)$ derivable y $f'(x_0)=0$, para saber si $f(x_0)$ es un máximo relativo pueden considerarse los valores de $f(x)$ en un $E_{(x_0)}$ y ver si satisface la definición.

Es decir, si es posible determinar un $E_{(x_0)}\ /\ \forall x \in E_{(x_0)}: f(x)< f(x_0) \Rightarrow f(x_0)$ máximo relativo.

La misma idea se utiliza para verificar la existencia de mínimo relativo.

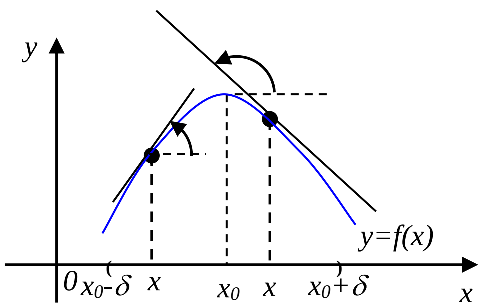
Observación: En general, este Criterio presenta dificultades de cálculo, pues exige considerar los valores de una función en los infinitos puntos de un entorno y puede llevar a conclusiones falsas si se consideran solo algunos valores de la función en puntos aislados del entorno.

Variación del signo de la derivada primera

Si $f(x)$ es una función derivable, x_0 punto interior a su dominio donde $f'(x)$ se anula: $f'(x_0)=0$, y existe $E_{(x_0)}$:

$$\exists\ \underbrace{E_{(x_0;\delta)}}_{E(x_0)}\ /\ \forall x: \left(\underbrace{x \in (x_0-\delta; x_0)}_{x \in E\left(x_0^-\right)} \Rightarrow f'(x)>0 \right) \wedge \left(\underbrace{x \in (x_0; x_0+\delta)}_{x \in E\left(x_0^+\right)} \Rightarrow f'(x)<0 \right) \Rightarrow f(x_0)$$

máximo relativo.



Demostración: sabemos que: $f'(x)>0 \text{ en } E_{\left(x_0^-\right)} \Rightarrow f(x)$ es creciente en $E_{\left(x_0^-\right)}$ (1) $\wedge$

$f'(x)<0 \text{ en } E_{\left(x_0^+\right)} \Rightarrow f(x)$ es decreciente en $E_{\left(x_0^+\right)}$ (2)

Luego, por (1): $\forall x \in \mathrm{E}_{\left(x_0^-\right)} : f(x) < f(x_0) \quad \wedge \quad$ por (2): $\forall x \in \mathrm{E}_{\left(x_0^+\right)} : f(x_0) > f(x)$

$\therefore \quad \forall x \in \mathrm{E}_{(x_0)} : f(x) < f(x_0)$, y de acuerdo con la definición: $f(x_0)$ es <u>máximo relativo</u>.

En forma análoga se demuestra el criterio para determinar un <u>mínimo relativo</u>.
Si $f(x)$ es una función derivable, x_0 es un punto interior a su dominio donde $f'(x_0) = 0$:

$$\exists E_{(x_0)} / \forall x : \left(x \in E_{\left(x_0^-\right)} \Rightarrow f'(x) < 0 \right) \wedge \left(x \in E_{\left(x_0^+\right)} \Rightarrow f'(x) > 0 \right) \Rightarrow f(x_0)$$ <u>mínimo relativo</u> de la función.

Es decir, $f(x_0)$ es mínimo relativo si la derivada primera pasa de negativa a positiva cuando x pasa de izquierda a derecha del punto x_0.

<u>Signo de la derivada segunda</u>

Si $f(x)$ es una función derivable, x_0 punto interior a su dominio donde $f'(x_0) = 0$ y existe $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f(x_0)$ es un <u>máximo relativo</u> de $f(x)$.

Obsérvese que este criterio difiere fundamentalmente de los anteriores pues solamente debe investigarse el signo de la derivada segunda en un punto y no exige su consideración en un entorno.

<u>Demostración</u>: sea: $f''(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} < 0$

por una propiedad de límite finito: $\exists E'_{(x_0)} / \forall x \in E'_{(x_0)} : \dfrac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} < 0$; como: $f'(x_0) = 0$, es: $\dfrac{f'(x)}{x - x_0} < 0$; para que este cociente sea negativo, numerador y denominador deben tener signos opuestos; o sea:

a izquierda de $x_0 : x - x_0 < 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \quad \wedge$

a derecha de $x_0 : x - x_0 > 0 \Rightarrow f'(x) < 0$

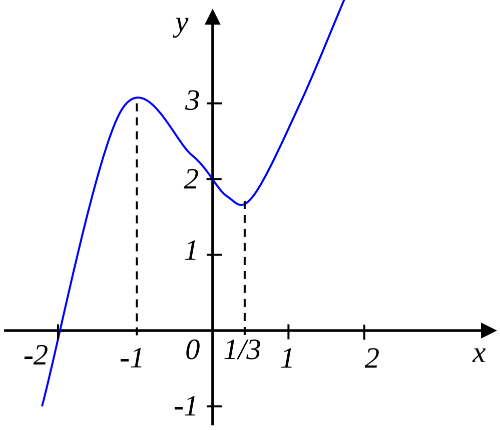
Luego, por el criterio de la derivada primera, $f(x_0)$ es <u>máximo relativo</u>.

En las mismas condiciones puede probarse que si $f''(x_0) > 0;\ f(x_0)$ es <u>mínimo relativo</u>.

<u>Ejemplo</u>: hallar extremos relativos de $f(x) = x^3 + x^2 - x + 2$, utilizando el criterio de la segunda derivada.

Calculamos $f'(x)$: $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$; $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1/3 \end{cases}$

Buscamos $f''(x)$: $f''(x) = 6x + 2$ $\begin{cases} f''(-1) = -4 < 0 \Rightarrow P_1(-1;3) \text{ máximo relativo} \\ f''\left(\frac{1}{3}\right) = 4 > 0 \Rightarrow P_2\left(\frac{1}{3};\frac{49}{27}\right) \text{ mínimo relativo} \end{cases}$



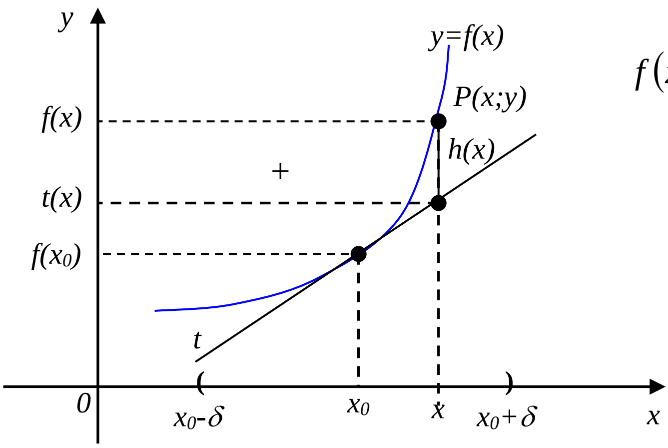
Concavidad de una curva

La curva correspondiente a una función derivable $y = f(x)$ es "***Cóncava hacia arriba***" en el punto $[x_0; f(x_0)]$, sí y solo sí existe un $E'_{(x_0)}$ donde la curva está por encima de la recta tangente a la misma en dicho punto. (La concavidad de la curva está dirigida hacia el sentido positivo del eje de las ordenadas).

La ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $[x_0; f(x_0)]$, es: $t(x) - f(x_0) = f'(x_0).(x - x_0)$. (Ecuación, recta que pasa por el $P(x_1; y_1): y - y_1 = m(x - x_1)$).

$$\therefore \quad t(x) = f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0)$$

Consideremos, ahora la función auxiliar: $h(x) = f(x) - t(x) > 0$



$$f(x) > t(x) \Rightarrow \overbrace{f(x) - t(x)}^{h(x)} > 0$$

Reemplazando $t(x)$ en $h(x)$: $h(x) = f(x) - \left[f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0)\right]$.

Obsérvese que el valor $h(x)$ es la deferencia entre la ordenada de la curva y la ordenada de la recta tangente t, para un punto cualquiera del dominio de $f(x)$.

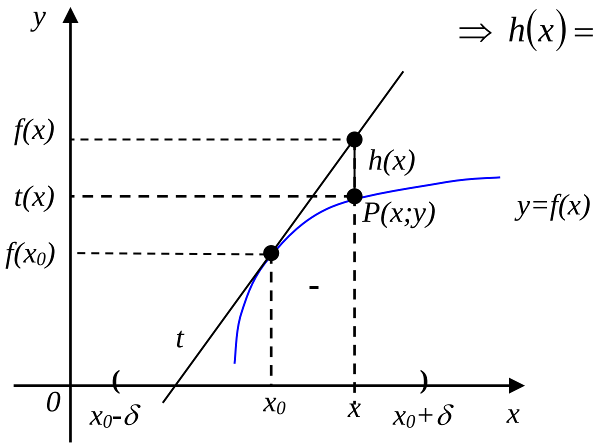
Por otra parte si $h(x)$ es positivo significa que la ordenada de la curva es mayor que la ordenada de la recta tangente, y entonces la curva en cada punto x del entorno está por encima de la recta tangente, lo que implica que la curva es cóncava hacia arriba o tiene concavidad positiva en el punto $[x_0; f(x_0)]$.

Se cumple también la implicación recíproca.

En forma análoga, podemos decir que la curva correspondiente a una función derivable $y = f(x)$ es "***Cóncava hacia abajo***" en el punto $[x_0; f(x_0)]$ sí y solo sí existe un $E'(x_0)$ donde la curva está por debajo de la recta tangente a la misma en dicho punto. En este caso la concavidad de la curva está dirigida hacia el sentido negativo del eje y.

Como puede verse en el gráfico: $h(x) = f(x) - t(x) < 0$

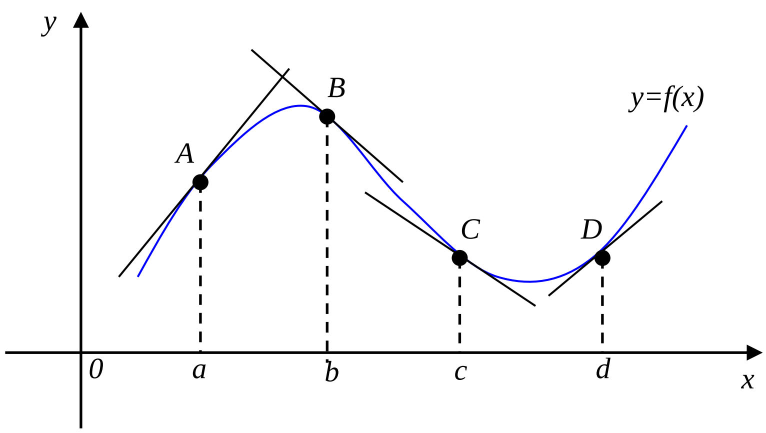
$$t(x) > f(x) \Rightarrow h(x) = t(x) - f(x) > 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h(x) = t(x) - f(x) < 0$$



Es decir $h(x)$ es negativa, puesto que la ordenada de la curva es menor que la ordenada de la recta tangente, y la curva en cada punto x del entorno está por debajo de la recta tangente, lo que implica que la curva es cóncava hacia abajo o tiene concavidad negativa en el punto $[x_0; f(x_0)]$.

Aquí también se cumple la implicación recíproca.

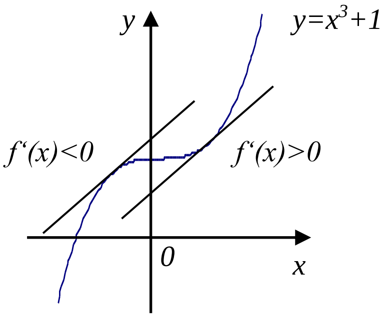
La Concavidad y el signo de la derivada segunda

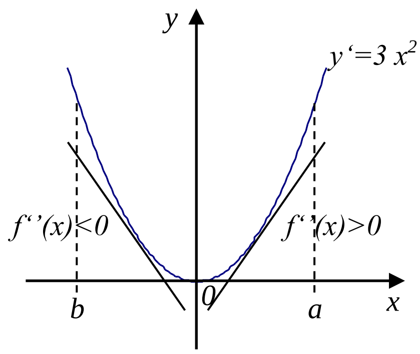


Consideramos la curva que se muestra en la figura. En un entorno de los puntos como A o B, la curva está por debajo de su tangente, y al ir de A a B, la tangente gira en el sentido de las

agujas del reloj. Análogamente, en un entorno de C o D, la curva está arriba de su tangente, y al ir de C a D la tangente gira en el sentido contrario a las agujas del reloj.
Además, si la tangente gira en el sentido de las agujas del reloj, la pendiente disminuye cuando vamos hacia la derecha; si la tangente gira en sentido contrario, la pendiente de la tangente aumenta.

Ahora bien, puesto que la pendiente de la tangente en cualquier punto $P(x;y)$ de la curva está dada por $f'(x)$, parecería que el signo de $f''(x)$, siempre que exista, nos permitiría analizar la conducta de la curva en los puntos tales como A, B, C y D.
Antes de demostrar lo anterior, trataremos de sacar algunas conclusiones de utilidad a partir del análisis de los gráficos de una función $f(x)$ y de su función derivada.
Sea la función: $f(x) = x^3 + 1$, cuya derivada es: $f'(x) = 3x^2$.





De la observación que se efectúa podemos concluir que:

(1)._ $f''(x) > 0$ en el intervalo $(0;b)$ lo que implica que la pendiente $f'(x)$ de la tangente es una función creciente y por lo tanto la tangente de la gráfica gira en sentido contrario al de las agujas del reloj, quedando la gráfica por arriba de la misma, cuando x aumenta.

(2)._ $f''(x) < 0$ en el intervalo $(a;0)$ lo que implica que la pendiente $f'(x)$ de la tangente es una función decreciente y por lo tanto la tangente de la gráfica gira en el sentido de las agujas del reloj, quedando la gráfica debajo de la misma, cuando x aumenta.

Estas conclusiones puramente sugeridas desde un punto de vista geométrico, se demuestran a partir del siguiente:

<u>Teorema</u>: sea $y = f(x)$ una función derivable dos veces en el intervalo $(a;b)$. Sea además x_0 un punto de este intervalo, y sea t la función lineal ya vista, definida por la ecuación: $t(x) = f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0)$. Entonces:

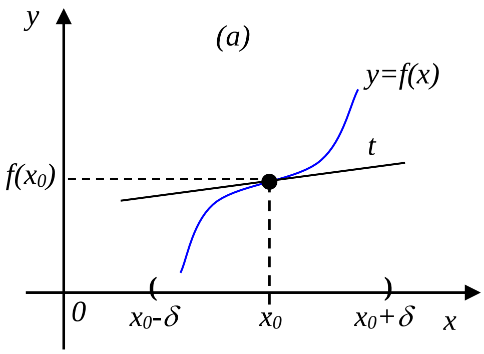
(a) si $f''(x) > 0$ en el intervalo $(a;b)$, entonces para cada x_0 hay un entorno reducido $E'(x_0;\delta)$ tal que $\forall x \in E'(x_0;\delta) \Rightarrow f(x) > t(x)$.
Geométricamente, esta desigualdad implica que la curva dada por $y = f(x)$ queda arriba de su tangente en un $E'(x_0;\delta)$.

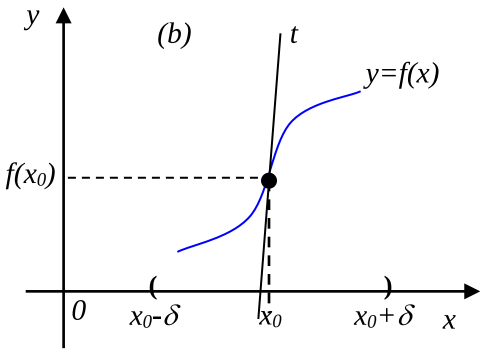
(b) si $f''(x) < 0$ en el intervalo $(a;b)$, entonces para cada x_0 hay un entorno reducido $E'(x_0;\delta)$ tal que $\forall x \in E'(x_0;\delta) \Rightarrow f(x) < t(x)$.

Geométricamente, esta desigualdad implica que la curva dada por $y = f(x)$ queda por debajo de su tangente en un $E'(x_0;\delta)$.

<u>Punto de Inflexión</u>:

El punto $[x_0; f(x_0)]$ del gráfico de una función derivable $y = f(x)$ es un <u>punto de inflexión</u> sí y solo sí, en el mismo, la curva cambia el sentido de su concavidad.





Si por ejemplo existe un $E_{(x_0;\delta)}$ tal que el gráfico de $f(x)$ es cóncavo hacia abajo en $(x_0-\delta; x_0)$ $(fig(a))$ y cóncavo hacia arriba en $(x_0; x_0+\delta)$, entonces el punto $[x_0; f(x_0)]$ es de inflexión.

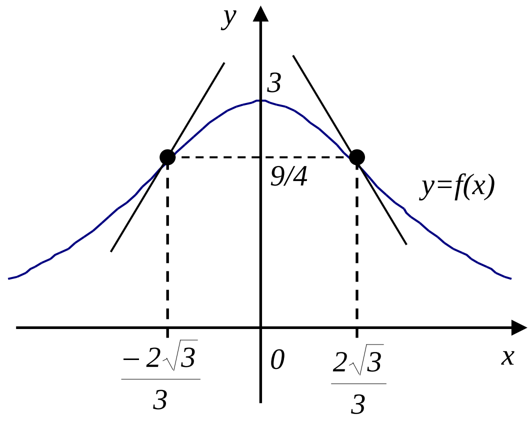
De acuerdo con la definición de concavidad en ambos semientornos, la tangente del gráfico atraviesa al mismo en dicho punto.

Según propiedades vistas, si $f''(x_0) = 0$, y existe un $E_{(x_0)}$ / $f''(x) > 0$ en $(x_0-\delta; x_0)$, y $f''(x) < 0$ en $(x_0; x_0+\delta)$, o recíprocamente, el punto considerado es de <u>inflexión</u>.

<u>Ejemplo</u>: hallar, si existen, puntos de inflexión en el gráfico de: $f(x) = \dfrac{12}{x^2+4}$.

$f'(x) = \dfrac{-24x}{(x^2+4)^2}$; $f''(x) = \dfrac{24(3x^2-4)}{(x^2+4)^3}$. Luego, sí: $f''(x) = 0 \Rightarrow x^2 = \dfrac{4}{3}$; es decir que la derivada segunda se anula en los puntos: $x_1 = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$; $x_2 = \dfrac{-2\sqrt{3}}{3}$;

Luego, los puntos $P\left(\frac{2\sqrt{3}}{3};f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\right)$; $Q\left(\frac{-2\sqrt{3}}{3};f\left(\frac{-2\sqrt{3}}{3}\right)\right)$ pueden ser puntos de inflexión.



Para verificarlo estudiemos la concavidad del gráfico en algún entorno de cada una de ellos.

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ E(x_1-\delta;x_1)=\left(0<x<{}^{2\sqrt{3}}\!/_{3}\right)\Rightarrow f''(x)<0\\(2)\ E(x_1;x_1+\delta)=\left({}^{2\sqrt{3}}\!/_{3}<x<5\right)\Rightarrow f''(x)>0\end{array}\right\}$$

$\therefore$ de acuerdo a lo visto, el punto *P* es punto de inflexión.

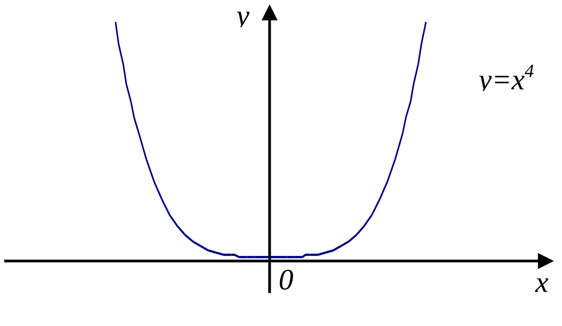
En forma análoga se demuestra que el punto *Q* es otro punto de inflexión.

Es importante tener en cuenta que la condición de ser nula la segunda derivada es necesaria pero no suficiente para la existencia de un punto de inflexión.

Ejemplo: Sea: $f(x)=x^4$

$f'(x)=4x^3;\ f''(x)=12x^2;\ f''(x)=0\Rightarrow 12x^2=0\Rightarrow x=0$, por lo tanto la derivada segunda se anula en el origen, pero allí no hay inflexión.

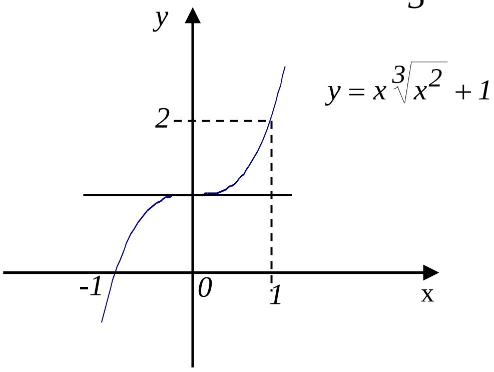
Puede probarse que la función tiene en $x=0$ un mínimo relativo y absoluto.



También es importante observar que puede haber inflexión en un punto donde $\nexists f''(x)$.

Ejemplo:

$f(x) = x\,.\sqrt[3]{x^2}+1 = x\,.x^{2/3}+1 = x^{5/3}+1 \qquad f'(x) = \frac{5}{3}x^{2/3};\quad f''(x) = \frac{10}{9\sqrt[3]{x}};\forall\, x \neq 0\,.$



Luego, la derivada segunda no existe en el origen, es decir para $x = 0$; pero, es positiva a la derecha del mismo y negativa a la izquierda. Además, como $f(x)$ es derivable en el origen, existe recta tangente, y la curva es cóncava hacia arriba a derecha del origen y cóncava hacia abajo a la izquierda. Por lo tanto, el punto $(0;1)$ es un punto de inflexión.

En conclusión, para encontrar los puntos de inflexión de un gráfico, interesa considerar los puntos donde se anula $f''(x)$, si existe, pero también hay que tener en cuenta los puntos del dominio donde $\nexists\, f''(x)$.

Otro método para llegar a la conclusión de Extremos relativos es la Prueba de la derivada de orden superior.

Ejemplo:

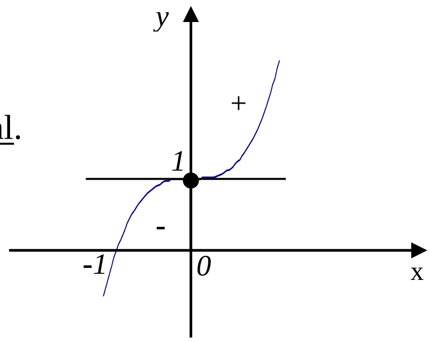
$f(x) = x^4$	$f(x) = -x^4$
$f'(x) = 4x^3 = 0 \Rightarrow x = 0.$	$f'(x) = -4x^3 = 0 \Rightarrow x = 0.$
$f''(x) = 12x^2;\ f''(0) = 0.$	$f''(x) = -12x^2;\ f''(0) = 0.$
$f'''(x) = 24x;\ f'''(0) = 0$	$f'''(x) = -24x;\ f'''(0) = 0$
$f^{IV}(x) = 24;\ f^{IV}(0) = 24 > 0$	$f^{IV}(x) = -24;\ f^{IV}(0) = -24 < 0$
(1)	(2)

(1) Puesto que el orden de la primera derivada que no se anula para ese valor, es par y mayor que cero, en $x = 0$ existe un mínimo relativo.

(2) Puesto que el orden de la primera derivada que no se anula para ese valor, es par y menor que cero, en $x = 0$ existe un máximo relativo.

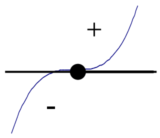
$f(x) = x\,.\sqrt[3]{x^2}+1 = x^{5/3}+1;\ f''(x) = \frac{10}{9\sqrt[3]{x}};\forall\, x \neq 0$

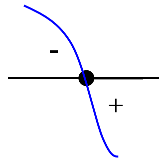
$$\left.\begin{array}{l} f''(-1) < 0 \\ f''(1) > 0 \end{array}\right. \Rightarrow P(0;1)$$ punto de inflexión con tangente horizontal.



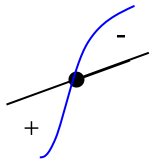
NOTA:

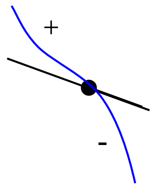
- ✓ Cuando la derivada segunda cambia de signo al pasar por los puntos $x = x_1$ y $x = x_2$, existen allí dos puntos de inflexión. Si la derivada segunda es negativa a la izquierda y positiva a la derecha de un punto, en él existe un <u>punto de inflexión con tangente horizontal</u>.





- ✓ Si la segunda derivada es positiva a la izquierda y negativa a la derecha del punto, allí existe <u>punto de inflexión con tangente oblicua</u>.

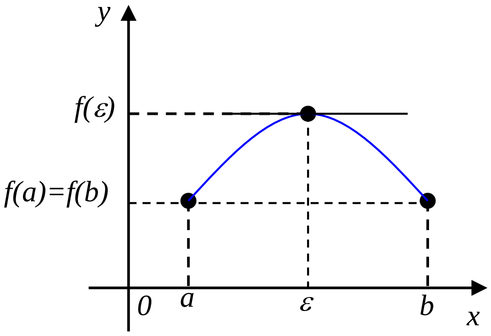




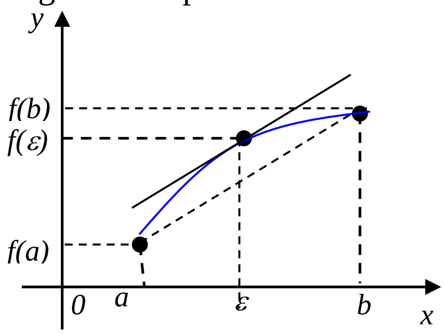
- ✓ Cuando el $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \infty$, <u>la tangente en el punto de inflexión es vertical</u>. (*a* es la abscisa del punto de inflexión).

Incrementos Finitos

Al dibujar la curva correspondiente a una función derivable en un intervalo cerrado, se verifica la siguiente propiedad geométrica:
Si se traza la recta que pasa por los puntos extremos de la curva, es posible hallar un punto interior, cuanto menos, al intervalo donde la tangente al gráfico es paralela a dicha recta.



(a)



(b)

La figura *(a)* corresponde al caso particular en que la función toma valores iguales en los extremos del intervalo. En cambio, en la figura *(b)* corresponde al caso general.

La propiedad ilustrada en la figura *(a)* se demuestra en el ***<u>Teorema de Rolle</u>***. La propiedad general mediante el ***<u>Teorema del Valor Medio</u>***.

Teorema de Rolle. Ilustración gráfica

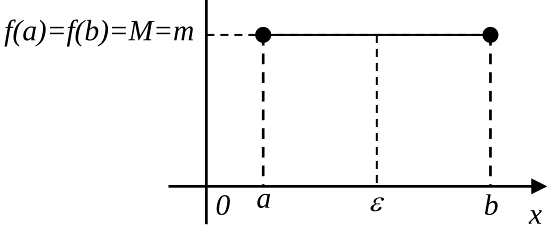
"Si una función $f(x)$ continua en el intervalo $[a;b]$ tiene derivada finita en el intervalo $(a;b)$, y además $f(a)=f(b)$, entonces existe por lo menos un punto ε en el intervalo $(a;b)$, donde $f'(\varepsilon)=0$".

Demostración:

De acuerdo con el segundo *Teorema de Weierstrass*, al ser $f(x)$ continua en el intervalo $[a;b]$, alcanzará en este un valor máximo absoluto *M* y un valor mínimo absoluto *m*.
A los efectos de la demostración, analicemos las dos posibilidades que se pueden presentar:

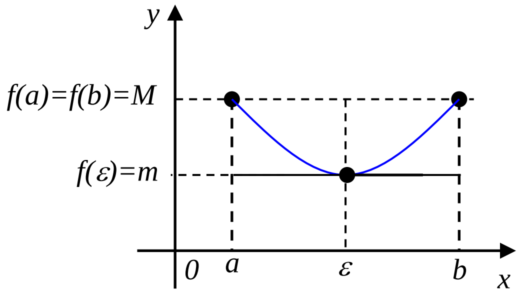
(a) Si $M=m$, la función $f(x)$ es constante, es decir tiene un valor constante $f(x)=m=M, \forall x$. Pero en este caso, en cualquier punto del intervalo considerado, y de acuerdo a lo ya visto, la derivada de una función constante es cero. Luego, $\forall x \in (a;b)$ es $f'(x)=0$.
Por lo tanto la tesis se verifica para cualquier punto interior del intervalo especificado:

$$\exists\, \varepsilon \in (a;b) \;/\; f'(\varepsilon)=0$$



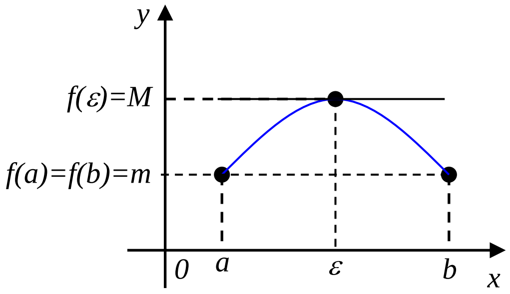
(b) Si $m \neq M$, entonces, uno de los dos valores es distinto de $f(a)=f(b)$. En virtud de ello se pueden presentar tres Casos:

(1) Si $m \neq f(a)$ y $M=f(a)$
En este caso, como *m* es el mínimo absoluto de $f(x)$ en $[a;b]$; será: $m < f(a)$, por lo tanto $f(x)$ alcanza el mínimo absoluto en un punto ε interior al intervalo. luego $f(\varepsilon)$ es un mínimo absoluto. Por un Teorema ya visto, como $f(x)$ es derivable, tendremos que: $f'(\varepsilon)=0$.



(2) Si $M \neq f(a)$ y $m = f(a)$

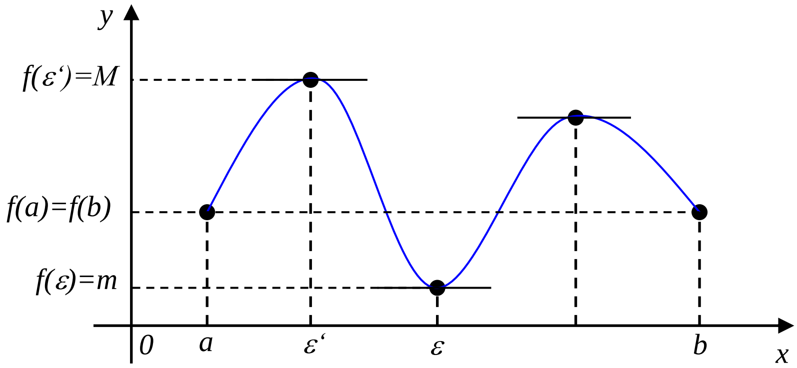
En este caso por ser M el máximo absoluto de $f(x)$ en $[a;b]$; será: $M > f(a)$. Por un razonamiento análogo al anterior, $f(\varepsilon) = M$, es el máximo absoluto y, por lo tanto: $f'(\varepsilon) = 0$.



(3) Si $M \neq f(a)$ y también $m \neq f(a)$

En este último caso, la función $f(x)$ alcanza el mínimo m en un punto ε interior al intervalo, y el máximo M en un punto ε' también interior al intervalo especificado $[a;b]$ .En esta situación, ambos extremos absolutos son también relativos.

Luego, es: $f'(\varepsilon) = 0$ y $f'(\varepsilon') = 0$.



<u>*Nota*</u>: los casos (1), (2) y (3) pueden sintetizarse en uno solo, de la siguiente manera:

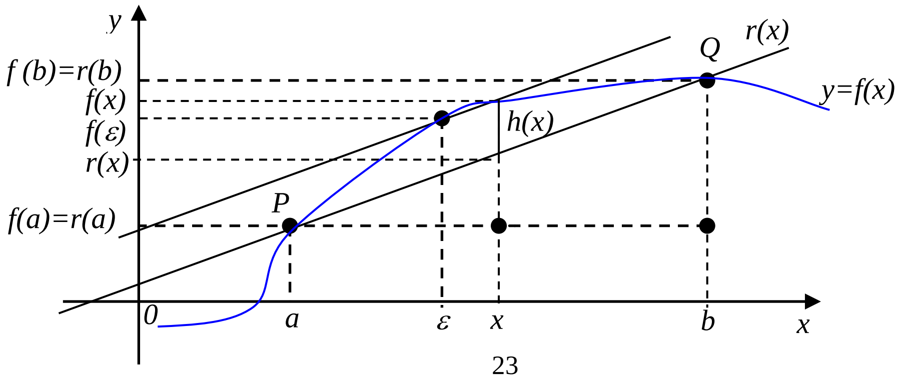
Si $m \neq M$, entonces uno de ellos, por lo menos, es distinto de $f(a) = f(b)$. Por lo tanto, $f(x)$ alcanza dicho extremo absoluto en un punto ε interior al intervalo, y $f(\varepsilon)$ es, al mismo tiempo, extremo absoluto y relativo. Por un Teorema anterior: $f'(\varepsilon) = 0$.

<u>*Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial. (Teorema de Lagrange)*</u>

Sí $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a;b]$ y tiene derivada finita en el $(a;b)$, entonces existe al menos un punto $\varepsilon \in (a;b)$ tal que: $f'(\varepsilon) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

<u>Demostración</u>:

Consideramos la recta $r(x)$ determinada por los puntos: $P[a; f(a)]$ y $Q[b; f(b)]$.



Por la ecuación de la recta que pasa por dos puntos: $y - f(a) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)$

Luego, la recta $r(x)$ es del tipo $r(x) = mx + b$

$\forall\, x \in \mathbb{R}$ $\qquad r(x) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}\,.\,x - \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}\,.\,a + f(a).$

La función lineal correspondiente, es:

$$r(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}\,.\,x + k\text{ ; siendo: } \mathrm{k} = -\frac{f(b) - f(a)}{b-a}\,.\,\mathrm{a} + \mathrm{f}(\mathrm{a}).$$

Determinemos una función auxiliar: $h(x) = f(x) - r(x)$.

La función $h(x)$ es derivable en $(a;b)$, por ser la resta de dos funciones derivables, y:

$$h'(x) = f'(x) - r'(x)$$

Es decir: $h'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$.

Por razones análogas $h(x)$ es continua en $[a;b]$, y además:

$$h(a) = f(a) - r(a) = 0\text{, y } h(b) = f(b) - r(b) = 0\,.$$

Por lo tanto, la función $h(x)$ cumple con las condiciones exigidas por la hipótesis del ***Teorema de Rolle***, y entonces: $\exists\, \varepsilon \in (a;b)\ /\ h'(\varepsilon) = 0$.

Pero: $h'(\varepsilon) = f'(\varepsilon) - r'(\varepsilon) = 0 \Rightarrow h'(\varepsilon) = f'(\varepsilon) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a} = 0$.

Luego: $\exists\, \varepsilon \in (a;b)$ tal que $f'(\varepsilon) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$ 1

Gráficamente puede observarse que la recta que une los puntos P y Q es paralela a la recta tangente a la curva en $[\varepsilon; f(\varepsilon)]$. En efecto, según el Teorema demostrado, ambos tienen igual pendiente.

Nota: Significado geométrico del ***Teorema de Lagrange***

$\dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$ (magnitud) representa la pendiente de la recta secante (cuerda) PQ que pasa por los puntos P y Q, cuyas abscisas son a y b.

Por otra parte, $f'(\varepsilon)$ es la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $[\varepsilon; f(\varepsilon)]$. De modo que el significado geométrico de la igualdad 1 es el siguiente:

"Si por cada punto del arco PQ puede trazarse una tangente, existirá sobre este arco, entre *P* y *Q*, cuanto menos un punto ε, tal que la correspondiente tangente es paralela a la secante (cuerda) que une los puntos *P* y *Q*".

Consecuencias del Teorema de Lagrange

(1) Si $f(x)$ es una función derivable en un intervalo *I*, y en todos los puntos del intervalo la derivada de $f(x)$ es nula, entonces $f(x)$ es constante en *I*.

Demostración:

Consideremos un intervalo cualquiera: $[x_1; x_2] \subseteq I$.
La función $f(x)$ satisface la hipótesis del Teorema del Valor Medio en $[x_1; x_2]$.

Luego, $\exists\, \varepsilon \in (x_1; x_2)$ tal que $f'(\varepsilon) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$; como: $f'(\varepsilon) = 0$, resulta: $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0$

$\therefore\ f(x_2) = f(x_1) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$. Como x_1 y x_2 son dos puntos cualesquiera de *I*:

$$\forall\, x \in I : f(x) = f(x_1) = f(x_2) = k$$

Luego, hemos probado que: $\forall\, x \in I : (\, f'(x) = 0 \Rightarrow \exists\ k \in \mathbb{R} \ /\ \ f(x) = k\,)$.

Obsérvese que este Teorema es el recíproco del Teorema que afirma que la derivada de una constante es nula.

(2) Si dos funciones tienen la misma derivada en cada punto de un intervalo *I*, entonces dichas funciones difieren en una constante. (***Teorema fundamental del cálculo integral***). (T.F.C.I.). O sea: si $f(x)$ y $g(x)$ son derivables en un intervalo *I* y $\forall\, x \in I : f'(x) = g'(x)$, entonces: $\exists\, k \in \mathbb{R} \ /\ \forall\, x \in I : f(x) - g(x) = k$.

Demostración:

$\forall\, x \in I : f'(x) - g'(x) = (f - g)'(x) = 0$. Por la consecuencia anterior:

$\exists\, k \in \mathbb{R} \ /\ \forall\, x \in I : (f - g)(x) = k$. O sea: $\forall\, x \in I : f(x) - g(x) = k \ \therefore\ \forall\, x \in I : f(x) = g(x) + k$.

Este resultado está incluido en el importante Teorema que afirma que: la condición necesaria y suficiente para que dos funciones tengan igual derivada es que difieran en una constante.

La condición es necesaria, pues si: $f(x) = g(x) + k$, con k constante, derivando resulta: $f'(x) = g'(x)$.

La condición es suficiente, lo asegura el Teorema (2).

Este Teorema es el ***Teorema Fundamental del Cálculo Integral***, pues, este propone precisamente encontrar todas las funciones que tienen una derivada dada. Ha quedado demostrado que si se posee una función que tiene una derivada dada, se poseen todas sin más que agregarle una constante.

Teorema (Concavidad)

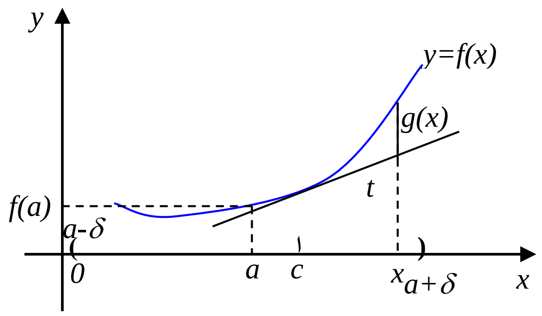
Si una función $f(x)$ tiene derivada segunda positiva en un punto a, y existe $f'(x)$ finita en un $E_{(a)}$, entonces la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia arriba en el punto $[a; f(a)]$.

Demostración:

Consideremos nuevamente la función $g(x)$ (la hemos considerado en concavidad de una curva), que indica la diferencia entre la ordenada de la curva y la ordenada de la tangente en $[a; f(a)]$, para un punto x del $E_{(a;\delta)}$, donde existe $f'(x)$.

Es, por lo tanto: $g(x) = f(x) - \lfloor f(a) + f'(a).(x - a) \rfloor$

Y también: $g(x) = [f(x) - f(a)] - f'(a).(x - a)$ 1



Si aplicamos el ***Teorema del Valor Medio*** al intervalo entre a y x, es posible encontrar un punto c entre a y x tal que: $f(x) - f(a) = f'(c).(x - a)$, reemplazando en 1, resulta:

$$g(x) = f'(c).(x - a) - f'(a).(x - a) = \lfloor f'(c) - f'(a) \rfloor.(x - a) \quad 2$$, con c entre a y x.

Ahora bien, por hipótesis: $f''(a)$ es positiva, es decir: $f''(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x) - f'(a)}{x - a} > 0$

Por una propiedad de los límites finitos: $\exists\, E'_{(a;\delta')} \ / \ \forall\, x : \left(x \in E'_{(a;\delta')} \Rightarrow \dfrac{f'(x) - f'(a)}{x - a} > 0 \right)$.

Para que este cociente de incrementos sea positivo, numerador y denominador tienen el mismo signo, es decir: $\left(x > a \Rightarrow f'(x) > f'(a) \right)$ y $\left(x < a \Rightarrow f'(x) < f'(a) \right)$

Supongamos: $\delta < \delta'$. Si $x \in E'(a;\delta)$, también $c \in E'(a;\delta)$, y se verifica:

$$x > a \Rightarrow f'(x) > f'(a) \Rightarrow f'(c) > f'(a) \quad \wedge \quad x < a \Rightarrow f'(x) < f'(a) \Rightarrow f'(c) < f'(a)$$

Por lo tanto, los dos factores de la expresión 2 tienen el mismo signo. Es decir: $\forall\, x : \left(x \in E'(a;\delta) \Rightarrow g(x) > 0\right)$ y el gráfico de $f(x)$ es cóncavo hacia arriba en el punto $[a; f(a)]$.

De la misma forma se demuestra que si $f''(a)$ es negativa, el gráfico de $f(x)$ es cóncavo hacia abajo en el punto $[a; f(a)]$.

Resumiendo:

$f''(x)$ es positiva, entonces la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia el eje *y* positivo (concavidad hacia arriba).

$f''(x)$ es negativa, entonces la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia el eje *y* negativo (concavidad hacia abajo).

Teorema de Cauchy

El cociente de incrementos de dos funciones continuas en $[a;b]$ y derivables en $(a;b)$, es igual al cociente de las derivadas correspondientes en un punto interior del intervalo.

O bien: si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones continuas en $[a;b]$ y derivables en $(a;b)$, y además $g'(x) \neq 0, \quad \forall\, x \in (a;b)$, entonces existirá un punto $\varepsilon \in (a;b)$ tal que $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$.

(Obsérvese que en la hipótesis no es necesario exigir que $g(b) - g(a) \neq 0$, a pesar de que esta expresión figura como denominador. Si fuera $g(b) = g(a)$, por el ***Teorema de Rolle***, existirá un punto ε donde $g'(\varepsilon) = 0$, lo que contradice el enunciado $g'(x) \neq 0$).

Demostración:

Consideremos una función que es combinación lineal de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ continuas y derivables:

$h(x) = f(x) + k \cdot g(x)$ 1, donde *k* es una constante, tal que $h(a) = h(b)$ (la función $h(x)$ toma valores iguales en los extremos del intervalo).

Determinemos *k*, de modo que esta expresión tome valores iguales en los puntos $x = a$ y $x = b$. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} h(a) = f(a) + k \cdot g(a) \\ h(b) = f(b) + k \cdot g(b) \end{array}\right\} \textit{como } h(a) = h(b) \Rightarrow f(a) + k \cdot g(a) = f(b) + k \cdot g(b) \Rightarrow \text{¨despejo¨ } k$$

$k=\dfrac{f(a)-f(b)}{g(b)-g(a)}=-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$; reemplazando *k* en 1: $h(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g(x)$.

Esta función es continua en $[a;b]$, por ser combinación lineal de dos funciones continuas $f(x)$ y $g(x)$ y además derivable en $(a;b)$. Es evidente, además que $h(a)=0 \quad \wedge \quad h(b)=0$. Por lo tanto $h(x)$ satisface, en el intervalo especificado, todas las condiciones del ***Teorema de Rolle***, entonces existirá al menos un punto $\varepsilon\in(a;b)$ tal que $h'(\varepsilon)=0$.

O sea: $h'(\varepsilon)=f'(\varepsilon)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(\varepsilon)=0 \Rightarrow \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)};\quad a<\varepsilon<b$.

Escribiendo *x* en lugar de *b,* tenemos el ***Teorema de Cauchy***:

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)};\quad a<\varepsilon<x\ .$$

Podemos observar que este ***Teorema (de Cauchy)*** comprende como caso particular, el ***Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial***. Sí $g(x)$ es la función identidad; es decir, si:

$$g(x)=x,\ \forall\, x\in[a;b]\ \therefore\ g(a)=a\ \wedge\ g(b)=b;\qquad g'(\varepsilon)=1$$

Luego: $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\varepsilon);\quad a<\varepsilon<b$ ***Teorema de Lagrange***

Límites Indeterminados. Regla de L' Hôpital

Al estudiar las diferentes propiedades de los límites de una función, hemos demostrado que: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, siempre y cuando $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$. Además, al estudiar límites infinitos, hemos visto que: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$, si $\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq 0$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$.

Es decir, puede probarse que si el divisor tiene límite nulo y dividendo límite finito, entonces el límite del cociente es infinito. Por lo tanto, queda por resolver un caso que aparece frecuentemente, y es justamente el de indeterminación del límite, o sea cuando tenemos el cociente de dos infinitésimos.

Este caso de indeterminación de límite lo constituye el siguiente ejemplo: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen\, x}{x}=\dfrac{0}{0}$. No obstante ello, de acuerdo a lo ya visto, este límite es igual a uno.

Cabe agregar que en muchas circunstancias esta indeterminación de límite, se puede destruir recurriendo a las funciones derivadas, mediante un método que se denomina ***Regla de L'Hôpital***:

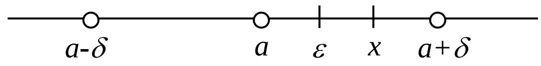
"Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones derivables en un $E'(a)$ (excluyendo a lo sumo el punto *a*), tales que $f(a) = g(a) = 0$, y además $g'(x) \neq 0,\ \forall\, x \in E'(a)$ (excluyendo a lo sumo el punto *a*), se verifica que, si existe:

$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe también: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ y se cumple que: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ ".

Demostración:

Tomemos en el intervalo $[a;x]$ un punto $x \neq a$. Aplicamos la fórmula de Cauchy:

$\dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \dfrac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$; donde $a < \varepsilon < x$



por hipótesis: $f(a) = g(a) = 0$, esto significa que: $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$.

Por otra parte si: $x \to a$, también $\varepsilon \to a$, ya que ε está comprendido entre *a* y *x*; es decir que en las proximidades de a, x y ε se encontrarán sumamente próximos, y al tomar límite será exactamente lo mismo hablar de x o de ε.

En consecuencia: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 1

Si aún fuese $f'(a) = 0$ y $g'(a) = 0$, estará el segundo miembro de 1 en condiciones de aplicar la Regla de L'Hôpital, resultando así: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f''(x)}{g''(x)}$.

Se observa que la regla podrá aplicarse en forma reiterada mientras siga apareciendo la indeterminación $0/0$.

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \,.\cos x - sen\, x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cancel{\cos x} + x.(-sen\, x) - \cancel{\cos x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} -x \,.\, sen\, x = 0$.

La Regla de L'Hôpital es aún aplicable a otros casos de indeterminación, y que analizaremos a continuación:

(a) Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0 \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$, entonces: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$; si hacemos $x = \dfrac{1}{z}$,

resulta que si $x \to \infty,\ z \to \infty$ y por lo tanto: $\lim\limits_{z\to 0} f\left(\dfrac{1}{z}\right) = 0;\ \lim\limits_{z\to 0} g\left(\dfrac{1}{z}\right) = 0$.

Es decir que: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{z\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{g\left(\frac{1}{z}\right)}$, y en este segundo miembro tenemos indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$, con la variable tendiendo a un número finito, podemos por lo tanto aplicar la Regla de L'Hôpital, con la sola observación de que $f(x)$ y $g(x)$ están expresados como función de z, por lo que se deberá aplicar la regla de derivación correspondiente:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{z\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{g\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{z\to 0}\frac{\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\right]'}{\left[g\left(\frac{1}{z}\right)\right]'}=\lim_{z\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)}\cdot\frac{-\cancel{\frac{1}{z^2}}}{-\cancel{\frac{1}{z^2}}}=\lim_{z\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Luego, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{sen\frac{k}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{cos\frac{k}{x}\cdot\left(-\frac{k}{\cancel{x^2}}\right)}{-\frac{1}{\cancel{x^2}}}=\lim\limits_{x\to\infty}k\cdot cos\frac{k}{x}=k$.

(b) Si $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty \quad\wedge\quad \lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$, entonces: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

En efecto, escribiendo: $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$, tenemos en el segundo miembro una indeterminación $\frac{0}{0}$, cuando $x\to a$, por lo que sí aplicamos la Regla de L'Hôpital, tenemos:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\left[\frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}\right]'=\lim_{x\to a}\frac{\left(\frac{1}{g(x)}\right)'}{\left(\frac{1}{f(x)}\right)'}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{-g'(x)}{g(x)^2}}{\frac{-f'(x)}{f(x)^2}}=\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}\cdot\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]^2$$

Luego, $\cancel{\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}}=\lim\limits_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}\cdot\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\cancel{\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}}\Rightarrow 1=\lim\limits_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}\cdot\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, si multiplicamos ambos miembros por: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$: $\quad\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\cancel{\lim\limits_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}}\cdot\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\cancel{\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$

por lo tanto $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{cotg\ x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{-1}{sen^2 x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{sen^2 x} = 1$

(c) Caso de indeterminación del tipo $\underline{0\,.\infty}$: sea $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0 \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$. En este caso hacemos: $\lim\limits_{x\to a} f(x).\,g(x)= \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$; donde la expresión del segundo miembro es de la forma $\frac{0}{0}$ cuando $x\to a$; luego se aplica la Regla de L'Hôpital para destruir la indeterminación.

(d) Caso de indeterminación del tipo $\underline{0^0}$: sea $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0 \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to a} g(x)=0$.

Entonces $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=0^0$.

Haciendo: $y=[f(x)]^{g(x)}$ y tomando ln en ambos miembros, tenemos: $ln\,y = g(x).ln\ f(x)$; si $x\to a$ obtenemos en el segundo miembro una indeterminación del tipo $0\,.\infty$.

Una vez calculado el $\lim\limits_{x\to a} ln\,y$, será fácil hallar el $\lim\limits_{x\to a} y$.

En efecto, en virtud de la continuidad de la función logarítmica, se tiene: $\lim\limits_{x\to a} ln\,y = ln \lim\limits_{x\to a} y$, y sí: $ln\lim\limits_{x\to a} y = b \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{definición\ de\\ logaritmo}} lim\,y=e^b$. Si como caso particular $b=+\infty$ ó $b=-\infty$ entonces será respectivamente: $lim\,y=+\infty$ ó $lim\,y=0$.

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to o} x^x$. Hacemos:

$$y=x^x \Rightarrow ln\,y = x\,.ln\,x \Rightarrow \lim_{x\to 0} ln\,y = \lim_{x\to 0}(x\,.ln\,x)=\lim_{x\to 0}\frac{ln\,x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cancel{x}}}{\frac{-1}{x^{\cancel{2}}}}=\lim_{x\to 0}-x=0\,.$$

Luego: $ln\lim\limits_{x\to 0} y=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} y=e^0=1 \ \therefore\ \lim\limits_{x\to 0} x^x=1$

Son también indeterminados los límites $\left(f(x)^{g(x)}\right)$ en los casos que se puede escribir simbólicamente: $1^\infty, \infty^0$, y estas indeterminaciones se salvan tomando logaritmo, pues entonces se trata de hallar el límite de: $g(x).ln\ f(x)$ que como en el caso anterior $\left(0^0\right)$ toma la forma $0\,.\infty$, ya estudiada. Luego, $1^\infty, \infty^0, 0^0$ se salvan de la misma manera.

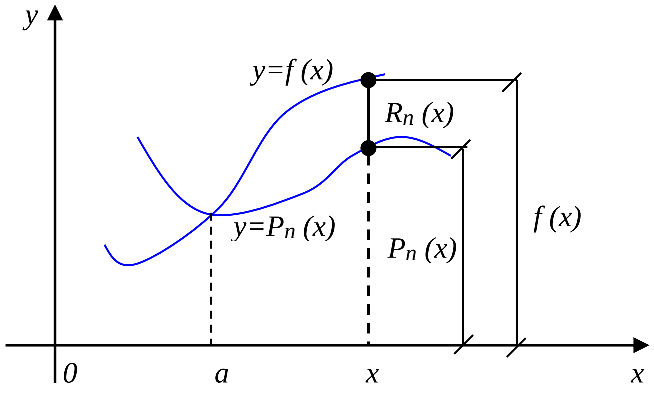
Nota: la Regla de L'Hôpital que permite, en el cálculo del límite, reemplazar a ciertas funciones por sus derivadas, solo puede aplicarse, como se ha indicado, al cociente de dos infinitésimos o al cociente de dos infinitos. Los restantes casos de indeterminación de límites deben reducirse previamente a uno de los dos casos mencionados, mediante operaciones algebraicas o mediante aplicación de logaritmos.

Polinomios y Fórmulas de Taylor y Mac Laurin

Los polinomios en una variable con coeficientes reales, determinan funciones simples que tienen la propiedad de ser derivable. Si el polinomio es de grado n, admite n polinomios no idénticamente nulos, que son sus derivadas sucesivas.

Ejemplo:

$$P(x) = 4x^3 + 2x^2 + 5x + 6$$
$$P'(x) = 12x^2 + 4x + 5$$
$$P''(x) = 24x + 4$$
$$P'''(x) = 24$$
$$P^{IV}(x) = 0$$



En más de una ocasión resulta conveniente aproximar el valor de una función derivable no polinómica, por ejemplo: $e^x, sen\, x, ln\, x$, etc. mediante un polinomio particularmente elegido, y precisar la aproximación o error que se comete al reemplazar el valor de la función en un punto x de su Dominio por el valor en el mismo punto del polinomio seleccionado.

Es decir que si una función $y = f(x)$ tiene n derivadas sucesivas finitas en un punto a, existe y es único el polinomio de grado n cuyas derivadas sucesivas coinciden con las derivadas de la función $f(x)$ en dicho punto a, y por lo tanto interesa conocer para el número x del Dominio, el valor de la diferencia: $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$.

El término $R_n(x)$ se conoce con el nombre de Término Complementario.

Para aquellos valores de x en que el Término Complementario $R_n(x)$ es pequeño, el polinomio $P_n(x)$ da un valor aproximado de la función $f(x)$.

Polinomios de Taylor y Mac Laurin

De acuerdo con las consideraciones efectuadas precedentemente, supongamos que la función $y = f(x)$ admite n derivadas finitas en cualquier punto de un cierto intervalo que contiene al punto $x = a$.
Busquemos ahora un polinomio $y = P_n(x)$ de grado n y coeficientes reales $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$ cuyo valor en el punto $x = a$ sea igual al de la función $f(x)$ en el mismo punto $x = a$, iguales a los valores de las derivadas correspondientes de la función $f(x)$ en el punto.

Es decir: $P(a) = f(a), P'(a) = f'(a), P''(a) = f''(a), \ldots, P^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$, . 1

Es de suponer que el polinomio que nos proponemos encontrar será, en cierto aspecto, próximo a la función $f(x)$.

Sea, entonces, la siguiente función polinómica de grado n y coeficientes reales:

$$P_n(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots + c_n x^n$$

si a es un número real cualquiera, es posible expresar el polinomio $P_n(x)$ según las potencias del binomio $(x-a)$, para lo cual basta efectuar las divisiones sucesivas por dicho binomio. Es decir que: $\forall\, x \in \mathbb{R}$, *será:*

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \ldots + c_n(x-a)^n \,. \qquad 2$$

Los coeficientes indeterminados $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$ los calculamos de modo que cumplan las condiciones enunciadas, o sea que se verifique 1 Para ello, hallaremos previamente las derivadas sucesivas de $y = P_n(x)$:

$$P_n'(x) = c_1 + 2.c_2(x-a) + 3.c_3(x-a)^2 + 4.c_4(x-a)^3 \ldots + n.c_n(x-a)^{n-1}$$
$$P_n''(x) = 2.c_2 + 2.3.c_3(x-a) + 3.4.c_4(x-a)^2 + \ldots + n.(n-1).c_n(x-a)^{n-2}$$
$$P_n'''(x) = 2.3.c_3 + 2.3.4.c_4(x-a) + \ldots + n.(n-1).(n-2).c_n(x-a)^{n-3}$$
$$- -$$
$$P_n^{(n)}(x) = 1.2.3.4.5 \ldots (n-2).(n-1).n.c_n$$

Luego, en el punto $x = a$ las funciones determinadas por las expresiones anteriores tomarán los siguientes valores:

$$\left.\begin{array}{l} P(a) = c_0 \\ P'(a) = c_1 \\ P''(a) = 1.2.c_2 = 2!.c_2 \\ P'''(a) = 1.2.3.c_3 = 3!.c_3 \\ - - - - - - - - - - - - - - - \\ P^{(n)}(a) = 1.2.3 \ldots n.c_n = n!.c_n \end{array}\right\} \quad \text{por lo tanto, resulta:} \quad \left\{\begin{array}{l} c_0 = P(a) \\ c_1 = P'(a) \\ c_2 = P''(a)/2! \\ c_3 = P'''(a)/3! \\ - - - - - - - - - \\ c_n = P^{(n)}(a)/n! \end{array}\right.$$

reemplazando en 2, tenemos:

$$P_n(x) = P(a) + P'(a).(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}.(x-a)^2 + \frac{P'''(a)}{3!}.(x-a)^3 + \ldots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}.(x-a)^n \,.$$

Esta función polinómica recibe el nombre de ***Polinomio de Taylor***.

Si consideramos en particular $a = 0$, el polinomio queda expresado se la forma:

$P_n(x) = P(0) + P^{'}(0).x + \frac{P^{''}(0)}{2!}.x^2 + \frac{P^{'''}(0)}{3!}.x^3 + \ldots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}.x^n$. Esta expresión recibe el nombre de ***Polinomio de Mac Laurin***.

Ahora bien, en virtud de 1, tenemos también que:

$c_0 = f(a)$

$c_1 = f^{'}(a)$

$c_2 = f^{''}(a) / 2!$

$-----------$

$c_n = f^{(n)}(a) / n!$

Luego: $P_n(x) = f(a) + f^{'}(a).(x-a) + \frac{f^{''}(a)}{2!}.(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.(x-a)^n$. Es el ***Polinomio de Taylor*** correspondiente a la función $y = f(x)$ en el punto $x = a$.

Sus *n* derivadas coinciden en el punto $x = a$ con las *n* derivadas de la función $f(x)$.

Por otra parte según lo visto anteriormente, hemos designado por $R_n(x)$,la diferencia entre los valores de la función dada $f(x)$, y el polinomio calculado $P_n(x)$: $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$, de donde tenemos: $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, o lo que es lo mismo:

$$f(x) \cong f(a) + f^{'}(a).(x-a) + \frac{f^{''}(a)}{2!}.(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.(x-a)^n + R_n(x) \quad 3$$

Además, si se considera: $f^{o}(x) = f(x)$, y recordando que: $0! = 1$, la expresión anterior 3 puede considerarse de la siguiente manera: $f(x) \cong \sum_{h=0}^{n} \frac{f^{(h)}(a).(x-a)^{(h)}}{h!} + R_n(x)$.

A fin de aclarar conceptos, efectuamos el siguiente ejercicio de aplicación:

Sea la función $f(x) = e^x$, cuyo valor se quiere aproximar mediante el Polinomio de Taylor en el punto $a = 1$.

$$P_n(x) = f(a) + f^{'}(a).(x-a) + \frac{f^{''}(a)}{2!}.(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.(x-a)^n \quad 1$$

$$\left.\begin{array}{l} f(a)=f(1)=e^{1}=e \\ f'(x)=e^{x} \quad \therefore \quad f'(a)=f'(1)=e^{1}=e \\ f''(x)=e^{x} \quad \therefore \quad f''(a)=f''(1)=e^{1}=e \\ f'''(x)=e^{x} \quad \therefore \quad f'''(a)=f'''(1)=e^{1}=e \\ ------------------------- \\ f^{(n)}(x)=e^{x} \quad \therefore \quad f^{(n)}(a)=f^{(n)}(1)=e^{1}=e \end{array}\right\}$$ Luego, reemplazando en 1:

$P_n(x)=e+e.(x-1)+\dfrac{e.(x-1)^2}{2\,!}+\ldots+\dfrac{e.(x-1)^n}{n\,!}$, o lo que es lo mismo: $P_n(x)=\sum\limits_{h=0}^{n}\dfrac{e^h.(x-1)^h}{h\,!}$

Este polinomio $P_n(x)$ es el ***Polinomio de Taylor*** correspondiente a la función $f(x)=e^x$ en el punto $a=1$.

Una vez encontrado el polinomio, interesa conocer el valor del Resto de Taylor o Término Complementario: $R_n(x)$, en el punto x perteneciente a un entorno del punto $a=1$, o sea:

$$R_n(x)=e^x-\sum_{h=0}^{n}\frac{e^h.(x-1)^h}{h\,!}$$

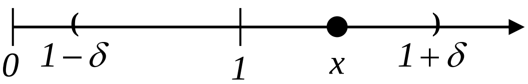
Como puede observarse, el valor $R_n(x)$ depende, para cada *x*, de *h*. O sea, del grado del polinomio.

Si, $h=1$ es $R_n(x)=e^x-\sum\limits_{h=0}^{1}\dfrac{e^h.(x-1)^h}{h\,!}$; o sea: $R_n(x)=e^x-[e+e\,.(x-1)]=e^x-ex$

Si $h=2$, es $R_n(x)=e^x-\sum\limits_{h=0}^{2}\dfrac{e^h.(x-1)^h}{h\,!}$; o sea:

$$R_n(x)=e^x-\left[e+e\,.(x-1)+\frac{e\,.(x-1)^2}{2\,!}\right]=e^x-ex-\frac{e}{2}\left(x^2-2x+1\right)=e^x-\frac{e}{2}-\frac{e\,x^2}{2}.$$

Por lo tanto, para *x* próximo a 1, el resto $R_n(x)$ considerado, se hace menor al aumentar el grado del polinomio que aproxima la función.



Si $h=1$, es decir si se considera el polinomio de Taylor de primer grado, la aproximación obtenida se llama aproximación lineal de la función en el punto especificado.
Si $h=2$, el polinomio será de segundo grado, la aproximación obtenida en este caso se denomina aproximación cuadrática de la función en el punto elegido, y así sucesivamente.

Fórmulas de Taylor y Mac Laurin - ***Fórmula de Lagrange del Término Complementario***

A continuación, determinaremos mediante el siguiente Teorema la expresión del Resto de Taylor.

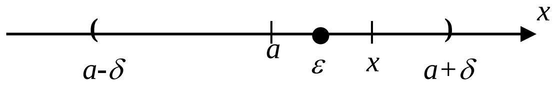
Teorema: sea $f(x)$ una función con derivada finita de orden $(n+1)$ en todos los puntos de un $E_{(a)}$. Si *x* es un punto cualquiera de dicho $E_{(a)}$, entonces existe un punto ε entre *a* y *x* tal que:

$$f(x)\cong P_n(x)+\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)\,.\,(x-a)^{(n+1)}}{(n+1)!}$$

En esta expresión, $P_n(x)$ es el polinomio de Taylor correspondiente a $f(x)$ en el punto *a*. Es decir:

$$f(x) \cong f(a) + f'(a).(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}.(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}.(x-a)^{(n+1)}$$

Demostración: vamos a demostrar el teorema para un punto *x* ubicado en el semientorno a la derecha de *a*. En forma análoga, puede efectuarse la demostración para un punto *x* ubicado en el semientorno a izquierda de *a*.



A los efectos de la demostración vamos a considerar a *x* como un punto fijo. Además, definamos en el intervalo $[a;x]$ dos funciones auxiliares: $F(t)$ y $G(t)$, de la siguiente manera:

$$F(t) = f(x) - f(t) - f'(t).(x-t) - \frac{f''(t).(x-t)^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(t).(x-t)^n}{n!}\ ;\ \forall\, t \in [a;x]$$

$$G(t) = (x-t)^{(n+1)};\ \forall\, t \in [a;x]$$

Como puede observarse, las funciones $F(t)$ y $G(t)$ cumplen con las condiciones del Teorema de Cauchy, y por lo tanto va a existir un punto ε interior al intervalo $(a;x)$ tal que:

$$\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)} = \frac{F'(\varepsilon)}{G'(\varepsilon)} \qquad 1$$

Si reemplazamos *t* por *x* en las expresiones que definen a las funciones F y G: $F(x) = G(x) = 0$. Además, al derivar F', debemos tener en cuenta que $f'(x) = 0$,pues $f(x)$ es una constante. Por lo tanto:

$$F'(t) = -\cancel{f'(t)} - f''(t)\cancel{.(x}-t) + \cancel{f'(t)} - \frac{f'''(t).\cancel{(x}-t)^2}{\cancel{2!}} + \frac{f''(t).\cancel{2.(x}-t)}{\cancel{2!}} - \ldots - \frac{f^{(n+1)}(t).(x-t)^n}{n!}$$

$F'(t) = -\dfrac{f^{(n+1)}(t).(x-t)^{(n)}}{n!}$. Luego: $F'(\varepsilon) = -\dfrac{f^{(n+1)}(\varepsilon).(x-\varepsilon)^{(n)}}{n!}$

$G'(t) = -(n+1).(x-t)^n$. Luego: $G'(\varepsilon) = -(n+1).(x-\varepsilon)^n$; reemplazando en la expresión 1:

$$\frac{F(a)}{G(a)} = \frac{\dfrac{f^{(n+1)}(\varepsilon).(x-\varepsilon)^n}{n!}}{(n+1).(x-\varepsilon)^n} \Rightarrow F(a) = G(a).\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!} \qquad \otimes$$

Sustituyendo en esta expresión los valores de $F(a)$ y $G(a)$, resulta: $(sustituyendo\ en\ F(t): t = a)$

$$F(a)=f(x)-f(a)-f'(a).(x-a)-\frac{f''(a).(x-a)^2}{2!}-...-\frac{f^{(n)}(a).(x-a)^n}{n!}=\underbrace{(x-a)^{(n+1)}}_{G(a)}.\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}$$

$$\uparrow por \otimes$$

$$f(x)-f(a)-f'(a).(x-a)-\frac{f''(a).(x-a)^2}{2!}-...-\frac{f^{(n)}(a).(x-a)^n}{n!}=\frac{(x-a)^{n+1}.f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}$$

despejando $f(x)$:

$f(x)=f(a)+f'(a).(x-a)+\dfrac{f''(a).(x-a)^2}{2!}+...+\dfrac{f^{(n)}(a).(x-a)^n}{n!}+\dfrac{f^{(n+1)}(\varepsilon).(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$. Esta expresión se denomina Fórmula de Taylor, donde: $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\varepsilon).(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$, es la Fórmula de Lagrange del Término Complementario, que tiene la misma expresión formal que los términos del polinomio de Taylor, pero el valor de la derivada de orden ($n+1$) no se calcula en el punto a, sino en el punto ε que está ubicado entre a y x.

Si $a=0$, se obtiene la Fórmula de Mac Laurin

$$f(x)\cong f(0)+f'(0).x+\frac{f''(0).x^2}{2!}+...+\frac{f^{(n)}(0).x^n}{n!}+\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon).x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Cabe agregar que el Término Complementario de Lagrange puede escribirse también de la siguiente forma, teniendo en cuenta que: $\varepsilon=a+\theta.(x-a)$ donde $0<\theta<1$.

Luego: $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}[a+\theta.(x-a)].(x-a)^{(n+1)}}{(n+1)!}$. Si $a=0$: $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x).x^{(n+1)}}{(n+1)!}$.

Aproximación de funciones

El cálculo del valor de un polinomio en un punto cualquiera x ubicado en un $E_{(a)}$ donde se conoce el valor del mismo y de sus derivadas sucesivas, es un problema sencillo. La Fórmula de Taylor permite utilizar este cálculo simple para aproximar funciones que no son polinomios, mediante el polinomio de Taylor correspondiente. La aproximación es más precisa cuando mayor sea el grado del polinomio.

El Término Complementario o Resto de Taylor, permite estimar la aproximación obtenida ya que es la diferencia entre el valor de la función en el punto considerado y el polinomio correspondiente. O sea: $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$, y también: $|R_n(x)|=|f(x)-P_n(x)|$.

Si se halla un número positivo δ tal que: $|R_n(x)|<\delta$, entonces $|f(x)-P_n(x)|<\delta$.

Es decir, si se considera como valor de la función $f(x)$ en el punto x, el valor numérico en dicho punto x del polinomio $P_n(x)$, el error cometido, en valor absoluto será menor que el número δ.

Ejemplo: aproximar la función *ln* mediante un polinomio de cuarto grado.

Consideremos la función de Taylor con un polinomio de cuarto grado:

$$f(x) \cong f(a) + f'(a).(x-a) + \frac{f''(a).(x-a)^2}{2!} + \frac{f'''(a).(x-a)^3}{3!} + \frac{f^{IV}(a).(x-a)^{IV}}{4!} + \frac{f^{V}(\varepsilon).(x-a)^{V}}{5!}\ ; a < \varepsilon < x$$

Luego:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \ln x \\ f'(x) = 1/x \\ f''(x) = -1/x^2 \\ f'''(x) = 2/x^3 \\ f^{IV}(x) = -6/x^4 \\ f^{V}(x) = 24/x^5 \end{array}\right\} \quad \text{si } a = 1 \text{ es: } \quad \left\{\begin{array}{l} f(1) = 0 \\ f'(1) = 1 \\ f''(1) = -1 \\ f'''(1) = 2 \\ f^{IV}(1) = -6 = -3! \\ f^{V}(1) = \frac{24}{\varepsilon^5} = \frac{4!}{\varepsilon^5}\ ;\ 1 < \varepsilon < x \end{array}\right.$$

Por lo tanto:

$$P_4(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2!} + 2\,.\frac{(x-1)^3}{3!} - 3!\,.\frac{(x-1)^4}{4!} = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4}$$

$$R_n(x) = \frac{4!\,.(x-1)^5}{5!\,.\varepsilon^5} = \frac{(x-1)^5}{5!\,.\varepsilon^5} = \frac{(x-1)^5}{5}\,.\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^5 \qquad 1$$

Si se elige x en el intervalo $(1;1{,}1)$, es $1 < \varepsilon < 1{,}1$ y $\frac{1}{\varepsilon} < 1$. Considerando los valores anteriores, de 1 , se obtiene: $|R_n(x)| < \frac{(0{,}1)^5}{5} = 0{,}000002.$

Luego, $\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} \pm 0{,}000002$, si $1 < x < 1{,}1$.

Por ejemplo, si elegimos $x = 1{,}01$, resulta: $\ln 1{,}01 \cong 0{,}00995033.$