

UTN - AM1

2025

Cursado Anual Recursantes

MÁXIMOS Y MÍNIMOS ABSOLUTOS

Sea: $f(x) : A \rightarrow \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}$, y sea: $x_0 \in A$.

(a) Se dice que la función $f(x)$ tiene en x_0 un máximo absoluto, si $f(x) \leq f(x_0); \forall x \in A$.

Cuando el máximo absoluto es alcanzado en un solo punto, o sea, $f(x) < f(x_0); \forall x \in A$, se dirá que el máximo absoluto es estricto.

(b) Se dice que la función $f(x)$ tiene en x_0 un mínimo absoluto, si $f(x) \geq f(x_0); \forall x \in A$.

Cuando el mínimo absoluto es alcanzado en un solo punto, o sea, $f(x) > f(x_0); \forall x \in A$, se dirá que el mínimo absoluto es estricto.

MÁXIMOS Y MÍNIMOS RELATIVOS (O LOCALES)

Sea: $f(x) : A \rightarrow \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}$, y sea: $x_0 \in A$.

- (a) Se dice que la función $f(x)$ tiene en x_0 un máximo relativo, si $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x$ suficientemente próximo a x_0 , es decir si se puede determinar un número real estrictamente positivo $\delta : (\delta > 0) / f(x) \leq f(x_0), \quad \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$. Sí $f(x) < f(x_0)$,
 $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, con $x \neq x_0$, se dirá que el máximo relativo $f(x_0)$ es estricto.
Resulta claro que $f(x_0)$ es el máximo absoluto en el intervalo $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$.

- (b) Se dice que la función $f(x)$ tiene en x_0 un mínimo relativo, si $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x$ suficientemente próximo a x_0 , es decir si se puede determinar un número real estrictamente positivo $\delta : (\delta > 0) / f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$.

CONDICIÓN NECESARIA PARA LA EXISTENCIA DE EXTREMOS RELATIVOS

Teorema:

Si una función derivable tiene un máximo o un mínimo relativo en un punto x_0 interior a su dominio, su derivada primera se anula en este punto, es decir $f'(x) = 0$

PUNTOS CRÍTICOS

Definición:

Si $f(x)$ es una función continua definida sobre un intervalo (abierto o cerrado), el punto x_0 es un punto crítico de $f(x)$ en dicho intervalo, si se cumple una de las siguientes condiciones:

- (1) x_0 es interior al intervalo y $f'(x)$ existe y es nula en x_0 . ($f'(x_0) = 0$).
- (2) x_0 es interior al intervalo y $f(x)$ no es derivable en x_0 . (No hay derivada finita).
- (3) x_0 es uno de los extremos del intervalo.

CRITERIOS PARA LA DETERMINACIÓN DE EXTREMOS RELATIVOS

- Estudios de los valores de la función
- **Variación del signo de la derivada primera**

Si $f(x)$ es una función derivable, x_0 punto interior a su dominio donde $f'(x)$ se anula, es decir $f'(x) = 0$, y existe un $E_{(x_0)}$:

$$\exists \underbrace{E_{(x_0;\delta)}}_{E_{(x_0)}} / \forall x: \left(\underbrace{x \in (x_0 - \delta; x_0)}_{x \in E_{(x_0^-)}} \Rightarrow f'(x) > 0 \right) \wedge \left(\underbrace{x \in (x_0; x_0 + \delta)}_{x \in E_{(x_0^+)}} \Rightarrow f'(x) < 0 \right) \Rightarrow f(x_0)$$

máximo relativo.

CRITERIOS PARA LA DETERMINACIÓN DE EXTREMOS RELATIVOS

- **Signo de la derivada segunda**

Si $f(x)$ es una función derivable, x_0 punto interior a su dominio donde $f'(x) = 0$, y existe $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x_0)$ es un máximo relativo de $f(x)$

ACTIVIDADES

Dadas las funciones

$$1) f(x) = x^3 + 3x^2$$

$$3) f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$$

$$4) f(x) = \frac{3-x}{x^2-9}$$

$$6) y = \frac{x^2+2x}{x-2}$$

$$2) y = \frac{4}{3}x^3 + x^2 - 2x$$

$$3) f(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2 - 8$$

$$5) f(x) = \frac{x^2-x}{x^2-2x-3}$$

- a) Determinar coordenadas y tipo de extremos relativos.
- b- Determinar intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- b) Determinar existencia y coordenadas de puntos de inflexión.
- c) Determinar intervalos de concavidad.
- d) Graficar la función con los puntos críticos obtenidos.

Problemas de aplicación

- 1- Un móvil inicia su movimiento, acelera y hace su recorrido de 15 minutos según la ecuación $f(x) = -\frac{t^4}{4} + 144t^2 + 100$, si se mide el tiempo y el espacio en metros calcula:
 - a) Distancia que recorre el móvil
 - b) Velocidad máxima que alcanza
 - c) Distancia que recorre cuando su velocidad es máxima
- 2- Un ranchero quiere vallar dos corrales rectangulares adyacente idénticos cada uno de 900m^2 de área, como se muestra en la figura ¿Cuánto deben medir x e y para que se necesite la mínima cantidad de valla?
- 3- Divide el número 150 en dos sumandos, tales que el producto del primero por el cuadrado del segundo sea máximo.
- 4- Calcular las dimensiones de un rectángulo con perímetro de 240 metros de manera que el rectángulo sea de área máxima. Determinar dicha área.

Regla de L'Hopital

“Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones derivables en un $E'(a)$ (excluyendo a lo sumo el punto a), tales que $f(a) = g(a) = 0$, y además $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in E'(a)$ (excluyendo a lo sumo el punto a), se verifica que, si existe:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ existe también: } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ y se cumple que: } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} .”$$

Actividades

3) Resolver los siguientes límites aplicando la Regla de L'Hôpital:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{e^{2x} - 1} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2x - 1)}{\operatorname{sen}(x - 1)} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + x}{x \cdot \ln x} \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \ln x =$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} x^{\operatorname{sen} x} = \quad \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 1)^{\frac{1}{x}} = \quad \text{g) } \lim_{x \rightarrow 0} (2x + e^x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} =$$