Integrales Indefinidas

1.- INTRODUCCIÓN Y DEFINICIÓN

En matemática estamos acostumbrados a hablar de operaciones inversas, la suma tiene su inversa que es la resta; el producto, la división; etc. También podemos pensar que la operación derivada tiene una inversa y esta será la integración o antiderivada (como la llaman algunos autores).
En este capítulo nos referiremos a ella, para lo cual debemos tener en cuenta que en el cálculo diferencial se expresó la derivada de una función de la siguiente manera:

$$\text{si} \quad y = f(x) \text{ resulta } \quad y' = f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

y, por lo tanto: $d\,f(x) = f'(x)\,dx$ que constituye la expresión de la diferencial de una función $f(x)$.

En el cálculo integral, trataremos de hallar una función cuya derivada conocemos, es decir, calcularemos $F(x)$ sabiendo como dato, que $F'(x) = f(x)$. Si además tenemos en cuenta que:

$$d\,F(x) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx,$$

podemos decir que el problema de la integración es hallar una función cuya diferencial (y por ende su derivada) conocemos.

La función $F(x)$ que se logra como resultado de este proceso se llama integral de la diferencial dada y recibe el nombre de primitiva o antiderivada de la función $f(x)$.
Por lo expuesto, podemos definir como función Primitiva o Antiderivada de una función $f(x)$:

$$F(x) \text{ es una Primitiva o Antiderivada de } f(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

Es necesario tener en cuenta que pueden existir muchas funciones que tienen la misma derivada (infinitas) y que, por el Teorema Fundamental del Cálculo Integral, todas difieren en una constante, por lo tanto, si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ también lo será $F(x) + C$, $\forall\, C \in \Re$, ya que se verificará: $D[F(x) + C] = F'(x) = f(x)$, lo cual satisface la definición de primitiva.
Asimismo, teniendo en cuenta lo dicho al comienzo, podemos definir la integral de dos maneras (que en realidad es solamente una):

"LA OPERACIÓN INTEGRAL ES BUSCAR UNA FUNCIÓN CUYA DIFERENCIAL (Y POR ENDE SU DERIVADA) SE CONOCE"

Simbólicamente:
$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \Leftrightarrow D\left[F(x) + C\right] = F'(x) = f(x)$$

El valor "***C***", que es una constante que pertenece al conjunto de los números reales, recibe el nombre de "Constante de Integración" y debemos escribirla en todos los casos de integrales indefinidas para tener en cuenta las infinitas primitivas que tiene una función y que difieren entre si en dicha constante.

2.- INTEGRALES INMEDIATAS

Si bien es posible afirmar que toda función continua tiene una integral indefinida o primitiva, puede resultar que esta sea imposible de obtener en términos de funciones elementales conocidas.

Además, es necesario tener en cuenta que en cálculo integral no se puede formular una regla general de integración, como la que fue formulada para el cálculo diferencial (que nos permitió obtener las fórmulas de derivación), sino que cada caso necesita un análisis especial que permita resolverlo.

Asimismo, y teniendo en cuenta esto, se puede afirmar que la integración es un procedimiento en el cual deben efectuarse sucesivos ensayos para resolverla, y para facilitar este trabajo se formularon tablas de integrales conocidas o de fácil cálculo, las que constituyen las llamadas "<u>Tablas de Integrales Inmediatas</u>", que convienen recordar para poder aplicarlas en los distintos problemas.

También es necesario aclarar que muchas de las integrales se resuelven solamente aplicando artificios matemáticos que son específicos para cada una de ellas. En el presente capítulo solo trataremos de explicar los métodos más generales para resolverlas.

Para el cálculo de algunas integrales inmediatas o fáciles de resolver tendremos en cuenta que se puede verificar el resultado obtenido aplicando la definición de integral, es decir, comparando la diferencial del resultado con la diferencial a integrar, las que deben resultar iguales.

Considerando lo expuesto, vamos a calcular algunas integrales inmediatas o fáciles de resolver:

a) $\int x^n\, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ si\ n \neq -1$ b) $\int \dfrac{dx}{x} = ln\, x + C\ ,\ si\ \ n = -1$

c) $\int e^x\, dx = e^x + C$ d) $\int \sqrt{x}\ \ dx = \int x^{1/2}\ dx = \dfrac{x^{3/2}}{3/2} + C\ = \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3} = \dfrac{2}{3}\, x\sqrt{x} + C$

e) $\int \dfrac{1}{x^n}\, dx = \int x^{-n}\ dx = \dfrac{x^{-n+1}}{-n+1} + C$ f) $\int sen\, x\ \ dx = -\cos x + C$ g) $\int cos\, x\ \ dx\ =\ sen\, x + C$

h) $\int sec^2\ x\ \ dx\ =\ tg\ \ x +\ C$ i) $\int\ sec\, x\, .\, tg\, x\ \ dx\ =\ sec\, x + C$ j) $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arc\, tg\ x\ + C$

k) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\ = arc\, sen\, x + C$ l) $\int -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\, cos\, x + C\ \ \ldots$

<u>Nota</u>: La presente tabla no agota la totalidad de integrales que pueden ser consideradas como inmediatas, sino se trató de ejemplificar las más usuales.

3.- PROPIEDADES DE LA INTEGRAL INDEFINIDA

3.1. <u>Derivada de la integral</u>

Por definición de integral, podemos decir:

$$\int f\,(x)\, dx = \ F\,(x) + C \Leftrightarrow D\,[\ F\,(x) + C] = F'\,(x) =\ f(x)$$

Si derivamos ambos miembros de la primera parte de la expresión de la definición de integral vemos que se mantiene la igualdad, dado que si las funciones son iguales, también lo son sus derivadas. Entonces:

$D\int f\,(x)\ \ dx = \ D\,[\ F\,(x) + C\ ]$ por lo tanto, resulta que: $D\int\ f(x)\, dx = F'\,(x)$

pero, por la definición de integral indefinida, resulta que: $F'(x) = f(x)$

y, por carácter transitivo podemos afirmar: $D\int f(x)\,dx = f(x)$, es decir:

"La derivada de una integral de una función da como resultado la misma función"

Ejemplo: $\int x^3\,dx = \dfrac{x^4}{4} + C$

resultado al que llegamos aplicando la fórmula de integración respectiva. Si derivamos a ambos miembros, resulta:

$D\int x^3\,dx = D\left[\dfrac{x^4}{4} + C\right] = \dfrac{4\,x^3}{4} = x^3$, con lo que se verifica numéricamente, la propiedad.

3.2 Integral de una diferencial

Teniendo en cuenta la definición de integral, podemos afirmar:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

si diferenciamos la segunda parte de esta expresión, resulta: $d\,[f(x)] = d\,[F'(x)]$

resolviendo las diferenciales tenemos: $f'(x)\;dx = F''(x)\;dx$, dado que la diferencial de una función es igual a la derivada de la misma, multiplicada por la diferencial de la variable independiente. Calculemos ahora la siguiente integral:

$$\int d\,[f(x)] = \int f'(x)\;dx = \int F''(x)\,dx$$

pero resulta que: $\int F''(x)\,dx = F'(x) + C \Leftrightarrow D\,[F'(x) + C] = F''(x)$

y como por la definición de integral resulta que: $f(x) = F'(x)$

por carácter transitivo podemos afirmar: $\boxed{\int d\,[f(x)] = f(x) + C}$

es decir:

"La integral de la diferencial de una función resulta igual a la misma función más la constante de integración"

Ejemplo: Sea: $f(x) = sen\,x$ resultará $d\,[f(x)] = cos\,x\;\;dx$

Por lo tanto: $\int d\,[f(x)] = \int cos\,x\;\;dx = sen\,x + C = f(x) + C$

3.3. Integral de una suma de funciones

Por la definición de integral indefinida resulta que:

$$\int f(x)\;dx = F(x) + C \Leftrightarrow D\,[F(x) + C] = F'(x) = f(x)$$

Si consideramos ahora la suma de dos funciones: $F(x) = G(x) + H(x)$

su derivada será: $F'(x) = G'(x) + H'(x)$

Teniendo en cuenta que la derivada de una suma de funciones es igual a la suma de las derivadas de cada una de ellas, y además: $F'(x) = f(x)$ entonces, $f(x) = G'(x) + H'(x)$ **(1)**

si llamamos:

$g(x) = G'(x)$ entonces $G(x)$ es primitiva de $g(x)$

y $h(x) = H'(x)$ entonces $H(x)$ es primitiva de $h(x)$ **(2)**

reemplazando en (1) resulta: $f(x) = g(x) + h(x)$; por lo tanto, si calculamos la integral indefinida resultará:

$$\int f(x)\,dx = \int [g(x) + h(x)]\,dx = F(x) + C = [G(x) + H(x)] + C$$

es decir: $$\int [g(x) + h(x)]\,dx = G(x) + H(x) + C \qquad \textbf{(3)}$$

Teniendo en cuenta lo expresado en (2) resulta que:

$$\begin{array}{rl} & \int g(x)\,dx = G(x) + C_1 \\ + & \\ & \int h(x)\,dx = H(x) + C_2 \\ \hline & \int g(x)\,dx + \int h(x)\,dx = G(x) + H(x) + C_1 + C_2 \end{array}$$

resultado que obtenemos sumando miembro a miembro las dos igualdades, que por supuesto da otra igualdad. Además, si consideramos que la suma de dos constantes da siempre otra constante, podemos hacer: $C = C_1 + C_2$

donde resulta: $$\int g(x)\,dx + \int h(x)\,dx = G(x) + H(x) + C \qquad (4)$$

Si comparamos ahora las expresiones (3) y (4) resulta que los segundos miembros de ambas son iguales, por lo tanto, también tienen que ser iguales los primeros miembros, es decir:

$$\int [g(x) + h(x)]\,dx = \int g(x)\,dx + \int h(x)\,dx$$

por lo tanto:

"La integral de una suma de funciones es igual a la suma de las integrales de dichas funciones"

Ejemplo: $$\int (x^3 + x^2)\,dx = \int x^3\,dx + \int x^2\,dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + C$$

3.4 <u>Integral de una constante por la función</u>

Por definición de integral indefinida resulta:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

Sea: $F(x) = k\,G(x)$ donde ***k*** es una constante cualquiera que pertenece al conjunto de los números reales. Si derivamos ambos miembros resultará: $F'(x) = K\,G'(x)$

Dado que la derivada de una función multiplicada por una constante es igual a la constante por la derivada de la función.
Si además consideramos: $G'(x) = g\,(x)$, entonces $G\,(x)$ es una primitiva de $g\,(x)$.
SI tenemos en cuenta las igualdades vistas anteriormente, podemos decir que:

$$F'(x) = k\,G'(x) = k\,g\,(x) = f\,(x)$$

Si calculamos ahora la integral siguiente, resultará:

$$\int f\,(x)\;dx = \int k\,g\,(x)\;dx = F\,(x) + C = k\,G\,(x) + C \qquad (1)$$

y además: $\int g\,(x)\;dx = G\,(x) + C_1$ por ser $G\,(x)$ una primitiva de $g\,(x)$
multiplicando ambos miembros de esta igualdad por k, la misma se mantendrá, es decir:

$$k\int g\,(x)\;dx = k\,[G\,(x) + C_1] = k\,G\,(x) + k\,C_1$$

reemplazando $k\;C_1 = C$ por ser ambas constantes de integración, la expresión anterior quedará:

$$k\int g\,(x)\;dx = k\,G(x) = C \qquad (2)$$

Si comparamos las expresiones (1) y (2), los últimos miembros de ambas son iguales, por lo tanto, por carácter transitivo también lo serán los primeros miembros, y entonces:

$$\boxed{\int k\,g\,(x)\;dx = k\int g\,(x)\;dx}$$

es decir:

"La integral de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función"

Ejemplo: $\int 3\,sen\,x\,dx = 3\int sen\,x\,dx = -\,3\cos x + C$

4.- MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

Como ya hemos mencionado, no siempre la integral de una función nos da una función elemental conocida y además, no siempre la función a integrar responde a algunas de las integrales llamadas inmediatas. En este último caso, es necesario aplicar algunos de los métodos que veremos a continuación. Los mismos representan técnicas adicionales, aplicables en algunos de los casos, para tratar de llevar la expresión a integrar a una forma inmediata o de más fácil resolución.
En general, los métodos se basan en propiedades de las funciones de las integrales que ya hemos considerado anteriormente.

4.1 Integración por Descomposición - Linealidad de la Integración

Este método se basa en las propiedades de las integrales vistas anteriormente en los puntos 3.3 y 3.4:

$$\int [f\,(x) + g\,(x)]\;dx = \int f\,(x)\,dx + \int g\,(x)\,dx$$

$$\int k\;f\,(x)\;dx = k\int f(x)\;dx$$

Su aplicación principal, aunque se usa en otros casos también, es en las funciones de tipo polinómicas. Consideremos, por ejemplo, el siguiente polinomio:

$$P(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + a_3\, x^3 + \dots + a_n\, x^n$$

calculamos su integral: $\int P(x)\,dx = \int (a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n\, x^n)\,dx$

al aplicar las propiedades vistas anteriormente, resulta:

$$\int P(x)\,dx = a_0 \int dx + a_1 \int x\,dx + a_2 \int x^2\,dx + \dots + a_n \int x^n\,dx =$$

con lo cual se logra una serie de integrales de fácil resolución. Es decir:

$$\int P(x)\,dx = a_0\, x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \dots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

lo que nos permitió resolver el problema.

Veremos a continuación un ejemplo de aplicación del método que nos permitirá entender mejor el problema. Calcularemos: $I = \int \frac{x^3 + 3\sqrt{x} - 6}{x}\,dx = \int \left(\frac{x^3}{x} + \frac{3\sqrt{x}}{x} - \frac{6}{x} \right) dx =$

$$\int \left(x^2 + 3\, x^{1/2}\, x^{-1} - \frac{6}{x} \right) dx =$$

aplicando descomposición, resulta:

$$I = \int x^2\,dx + 3 \int x^{-1/2}\,dx - 6 \int \frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3} + 6\sqrt{x} - 6\ln x + C$$

con lo cual hemos logrado resolver la integral.

4.2 <u>Integración por Sustitución</u>

Este método es también conocido como "Integración por la Regla de la Cadena", por similitud a la regla de la cadena utilizada en derivadas de funciones compuestas.

Este método se aplica, en general, cuando tenemos que integrar una función de función (o función compuesta).

Consideremos dos funciones derivables: $y = F(u) \quad \wedge \quad u = g(x) \quad \Rightarrow \quad y = F[g(x)]$

derivando, para lo cual hay que aplicar la regla de la cadena, resulta que: $y' = F'(u) \,.\, g'(x)$

si además: $F(u)$ es primitiva de $f(u)$ entonces $F'(u) = f(u)$, de donde:

$y' - F'(u) \,.\, g'(x) = f(u) \,.\, g'(x) = f[g(x)] \,.\, g'(x)$

Ahora bien, si tenemos una integral del tipo: $\int f\,[g(x)] \,.\, g'(x)\,dx$

y teniendo en cuenta que: $u = g(x) \Rightarrow du = g'(x)\,dx$

reemplazando en la integral:

$$\int f\,[g(x)]\; g'(x)\;dx = \int f(u)\;du = F(u) + C = F\,[g(x)] + C$$

que nos ha permitido resolverla.

A continuación presentamos una serie de ejemplos que nos permitirá apreciar la mayoría de los casos que se resuelven aplicando el método de integración por sustitución:

a) $\int cos\, ax\ dx =$

si llamamos $u = ax \Rightarrow du = a\ dx \Rightarrow \dfrac{du}{a} = dx$

entonces: $$\int cos\, ax\, dx = \int cos\, u \frac{du}{a} = \frac{1}{a}\int cos\, u\ du = \frac{1}{a} sen\, u + C = \frac{1}{a} sen\, ax + C$$

b) $\int \sqrt{3x+2}\ dx =$

si llamamos $u = 3x + 2 \Rightarrow du = 3\ dx \Rightarrow \dfrac{du}{3} = dx$

entonces: $$\int \sqrt{3x+2}\ dx = \int \sqrt{u}\ \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int u^{1/2}\ du =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{9}\ u^{3/2} + C = \frac{2}{9}\ \sqrt{(3x+2)^3} + C$$

c) $\int (ax - b)^3\ dx =$

si llamamos $u = ax - b \Rightarrow du = a\ dx \Rightarrow dx = \dfrac{du}{a}$

realizando la sustitución: $$\int (ax-b)^3\ dx = \int u^3\ \frac{du}{a} = \frac{1}{a}\int u^3\ du = \frac{u^4}{4a} + C = \frac{(ax-b)^4}{4a} + C$$

d) $\int \dfrac{2x\ dx}{(3x^2+5)^5} =$

si llamamos: $u = 3\,x^2 + 5 \Rightarrow du = 6x\ dx \Rightarrow x\ dx = \dfrac{du}{6}$ sustituyendo:

$$\int \frac{2x\ dx}{(3x^2+5)^5} = \int \frac{2\ \frac{du}{6}}{u^5} = \frac{1}{3}\int u^{-5}\ du = \frac{1}{3}\ \frac{u^{-4}}{-4} + C = -\frac{1}{12\,u^4} + C = -\frac{1}{12\,(3\,x^2+5)^4} + C$$

e) $\int e^{-5x}\ dx$

si llamamos: $u = -5\,x \Rightarrow du = -5\ dx \Rightarrow dx = -\dfrac{dx}{5}$

realizando la sustitución: $$\int e^{-5x}\ dx = \int e^{u}\left(-\frac{du}{5}\right) = -\frac{1}{5}\int e^{u}\ du = -\frac{1}{5}\, e^{u} + C = -\frac{1}{5}\, e^{-5x} + C$$

f) $\int \dfrac{3\,x^3\ \ dx}{(x^2-2)^2}$

si llamamos: $u = x^2 - 2 \Rightarrow du = 2x\ dx \Rightarrow \dfrac{du}{2} = x\ dx$

donde: $x^2 = u + 2$, por lo tanto: $\int \frac{3\,x^3\,dx}{(x^2-2)^2} = 3\int \frac{x^2\;x\,dx}{(x^2-2)^2} = 3\int \frac{(u+2)\frac{du}{2}}{u^2} =$

$= \frac{3}{2}\int \frac{u+2}{u^2}\,du =$ y podemos aplicar el método de descomposición visto anteriormente:

$$= \frac{3}{2}\left[\int \frac{u\,du}{u^2} + 2\int \frac{du}{u^2}\right] = \frac{3}{2}\int \frac{du}{u} + 3\int u^{-2}\,du = = \frac{3}{2}\ln u + 3\,\frac{u^{-1}}{-1} + C = \frac{3}{2}\ln(x^2-2) - \frac{3}{x^2-2} + C$$

g) $\int \frac{x^5\;dx}{(x^2-1)^3} =$

si llamamos $u = x^2 - 1 \Rightarrow du = 2x\;dx \Rightarrow \frac{du}{2} = x\;dx$

además: $x^2 = u + 1 \Rightarrow x^4 = (u+1)^2 = u^2 + 2u + 1$

sustituyendo: $\int \frac{x^5\;dx}{(x^2-1)^3} = \int \frac{(u^2+2u+1)\frac{du}{2}}{u^3} = \frac{1}{2}\left[\int \frac{u^2}{u^3}\,du + 2\int \frac{du}{u^2} + \int \frac{du}{u^3}\right] =$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} + \int u^{-2}\,du + \frac{1}{2}\int u^{-3}\,du =$$

$$= \frac{1}{2}\;\ln u + \frac{u^{-1}}{-1} + \frac{1}{2}\,\frac{u^{-2}}{-2} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\;\ln u - \frac{1}{u} - \frac{1}{4\,u^2} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\;\ln(x^2-1) - \frac{1}{(x^2-1)} - \frac{1}{4\,(x^2-1)^2} + C$$

4.3 <u>Integración por partes</u>

Es una técnica que se utiliza para transformar una integral a formas más sencillas que la dada originalmente y así poder resolverla. Su justificación se basa en el cálculo de la diferencial de un producto de dos funciones, es decir:

$d\,(u\,.v)$ donde $u = u\,(x) \wedge v = v\,(x)$ es igual a:

$$d\,(u\,.v) = D\,(u\,.\,v)\,dx = (u'v + v'\,u)\;dx = v\,u'\,dx + \;u\,v'\,dx$$

y si tenemos en cuenta que:

$u = u\,(x) \Rightarrow\; du = u'\,dx$

$v = v\,(x) \Rightarrow\; dv = v'\,dx$

Reemplazando: $d\,(u\,.\,v) = v\,du + u\,dv$

De donde: $u\,dv = d\,(u\,.\,v) - v\;\,du$

Si integramos ambos miembros y aplicamos propiedades de la integral indefinida, tendremos:

$$\int u\;\,dv = \int d\,(u\,.v) - \int v\,du = u\,.\,v - \int v\,du$$

Luego, la fórmula a utilizar:

$$\boxed{\int u\,dv = u\,.\,v - \int v\,du}$$

En general puede decirse que: "La integral del producto de una función por la diferencial de otra, es igual al producto de ambas funciones menos la integral de la segunda por la diferencial de la primera función".
Aparentemente deben existir don funciones para poder aplicar el método, pero resulta que también es aplicable, como veremos en los ejemplos, a los casos de funciones trascendentes cuyas derivadas son algebraicas, como por ejemplo, la función $y = ln\ x$ cuya derivada es $y' = \frac{1}{x}$, y en ese caso: $\int ln\ x\ dx$ se puede resolver por el método de integración por partes, aunque parece una sola función, pero realmente son dos, es decir:

$$u = ln\ x \quad \wedge \quad v = x \quad \Rightarrow dv = dx$$

Asimismo, siempre debe descomponerse la diferencial dada en dos funciones (*u* y *dv*) y la mayor dificultad del método estriba en que no pueden darse instrucciones precisas para la elección de las mismas, sino solamente algunas indicaciones como las siguientes:

- El *dx* está siempre presente en *dv*
- Debe resultar posible integrar *dv* (aunque no siempre sea una integral inmediata)
- Cuando se deba integrar el producto de dos funciones, generalmente es mejor elegir la forma más complicada (aparentemente) como parte del *dv*.

Veamos el siguiente ejemplo. Primero lo resolveremos eligiendo correctamente los factores y luego haremos la elección incorrecta de los mismos para que se vea como aparece una segunda integral más difícil de resolver, que la primera.
Consideremos: $\int x\, e^x\ dx$
si elegimos: $u = x \Rightarrow du = dx$

$$dv = e^x\ dx \Rightarrow v = \int dv = \int e^x\ dx = e^x$$

de donde: $\int x\, e^x\ dx = x\, e^x - \int e^x\ dx = x\, e^x - e^x + C$

Nótese que la constante de integración "*C*" recién fue colocada al finalizar con las integraciones y no en el cálculo de las integrales intermedias, es decir, al calcular la $\int dv$; esto se hace, ya que, como veremos a continuación, el uso de la constante intermedia dan el mismo resultado que si la colocamos al final. Como ejemplo calcularemos la misma integral anterior, utilizando todas las constantes de integración, es decir: $\int x\, e^x\ dx =$
si elegimos: $u = x \Rightarrow du = dx$

$$dv = e^x\ dx \Rightarrow v = \int dv = \int e^x\ dx = e^x + C_1$$

donde resulta:

$$\int x\, e^x\ dx = x\,(e^x + C_1) - \int (e^x + C_1)\, dx =$$

$$= x\, e^x + x\, C_1 - \int e^x\ dx - C_1 \int dx =$$

$$= x\, e^x + x\, C_1 - e^x + C_2 - x\, C_1 + C_3 =$$

$$= x\, e^x - e^x + C_2 + C_3 = x\, e_x - e_x + C$$

Teniendo en cuenta que la suma de dos constantes es otra constante: $C_2 + C_3 = C$

Con lo que se puede comprobar que el resultado obtenido es el mismo que el logrado colocando la constante al finalizar todas las integraciones.

Veremos a continuación la manera incorrecta de resolverla: $\int e^x \; x \; dx =$

si elegimos: $u = e^x \Rightarrow \; du = e^x \; dx$

$$dv = x \; dx \;\Rightarrow v = \int dv = \int x \, dx = \frac{x^2}{2}$$

donde resulta: $\int e^x \; x \; dx = e^x \; \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} e^x \; dx = \frac{e^x \; x^2}{2} - \frac{1}{2} \int x^2 \; e^x \; dx$

Podemos observar que la integral que nos queda es más complicada que la original y este hecho nos indica que la elección es incorrecta.

Ejemplos:

a.- $\int ln \, x \; dx =$

si: $u = ln \; x \;\Rightarrow\; du = \dfrac{du}{x}$

$dv = \; dx \;\Rightarrow v = \int dv = \int dx = x$

entonces:

$$\int ln \, x \; dx = x \, ln \, x - \int x \frac{dx}{x} = x \, ln \, x - \int \; dx =$$

$$= x \, ln \, x - x + C = x \, (l - ln \, x) + C$$

b.- $\int arc \, tg \; x \; dx =$

si: $u = arc \; tg \, x \; dx = \;\Rightarrow\; du = \dfrac{dx}{1 + x^2}$

$dv = dx \;\Rightarrow\; v = \int dv = \int dx = x$

entonces: $\int arc \, tg \; x \; dx = x \; arc \, tg \; x - \int \dfrac{x \; dx}{1 + x^2} =$

y esta última integral la resolvemos por sustitución:

$$w = 1 + x^2 \;\Rightarrow dw = 2 \, x \; dx \Rightarrow x \; dx = \frac{dw}{2}$$

de donde:

$$\int \frac{x \; dx}{1 + x^2} = \int \frac{\frac{dw}{2}}{w} = \frac{1}{2} \int \frac{dw}{w} = \frac{1}{2} \, ln \, w + C =$$

$$\frac{1}{2} \; ln \; (1 + x^2 \;)$$

reemplazando resulta: $\int arc \, tg \; x \; dx = x \; arc \, tg \; x - \frac{1}{2} \, ln \, (1 + x^2 \;) + C$

c.- $\int cos^2\ x\ dx = \int cos\ x\ cos\ x\ dx =$

si: $u = cos\ x \Rightarrow du = -sen\ x\ dx$

$dv = cos\ x\ dx \Rightarrow v = \int dv = \int cos\ x\ dx = sen\ x$

entonces: $\int cos^2\ x\ dx = cos\ x\ .\ sen\ x + \int sen^2\ x\ dx =$

como: $sen^2\ x = 1 - cos^2\ x$

reemplazamos y resulta:
$$\int cos^2\ x\ dx = cos\ x\ sen\ x + \int (1 - cos^2 x)\, dx =$$
$$= cos\ x\ sen\ x + \int dx - cos^2\ x\ dx$$

resolviendo: $2 \int cos^2\ x = cosx\ sen\ x + x$

luego: $\int cos^2 x\ dx = \frac{1}{2}(x + cos\ x\ .\ sen\ x) + C$

d.- $\int x^2\ sen\ x\ dx$

si: $u = x^2 \Rightarrow du = 2\ x\ dx$

$dv = sen\ x\ dx \Rightarrow v = \int dv = \int sen\ x\ dx = -\ cos\ x$

entonces:
$$I = \int x^2\ sen\ x\ dx = -\ x^2\ cos\ x + \int 2x\ cos\ x\ dx =$$
$$= -\ x^2\ cos\ x - 2 \int x\ cos\ x\ dx =$$

Debemos calcular la última integral que, si bien no es inmediata, también puede resolverse por partes, siendo más simple que la integral inicial, es decir:

$\int x\ cos\ x\ dx =$

si: $u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = cos\ x\ dx \Rightarrow v = \int dv = \int cos\ x\ x\ dx = sen\ x$

entonces: $\int x\ cos\ x\ dx = x\ sen\ x + cos\ x$

y reemplazando en la integral I tendremos que:

$$I = \int x^2\ sen\ x\ dx = -\ x^2\ cos\ x + 2\,(x\ sen\ x + cos\ x) + C$$

5.- INTEGRACIÓN DE FUNCIONES ALGEBRAICAS RACIONALES FRACCIONARIAS

Analizaremos la integración de funciones del tipo: $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$

Tanto *P(x)* como *Q(x)* son polinomios de "x": Por ejemplo:

$$P(x) = a_0 + a^1\ x + a_2\ x^2 + a_3\ x^3 + ... + a_n x^n$$

$$Q(x) = b_0 + b_1\ x + b_2\ x^2 + b_3\ x^3 + ... + b_m x^m$$

Donde el grado del polinomio *P(x)* es "n" y el de *Q(x)*, "m". Entonces la función:

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_n\ x^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + ... + b_m x^m}$$

recibe el nombre de "fracción racional fraccionaria"
Comparando los grados de ambos polinomios puede resultar que: $n \geq m$. En ese caso la función recibe el nombre de fraccionaria impropia. Si $n < m$, la función es fraccionaria propia.

Los métodos que analizaremos a continuación están referidos a funciones fraccionarias propias, pero en el caso de no serlo, se podrán convertir mediante una fácil operación algebraica. Para ello y, como el grado del polinomio del numerador es mayor que el grado del denominador, podemos efectuar la división, con lo cual obtendremos un resultado que llamaremos *C(x)* y un Resto *R (x)*; donde ambos son polinomios de "x", es decir:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} R(x) & C(x) \end{array}$$

El grado de *R(x)* debe ser menor que el de *Q(x)*, caso contrario, la división está incompleta y debemos continuar hasta que esto ocurra.

Por la definición de cociente resulta: $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$
Si dividimos ambos miembros por *Q(x)* nos queda:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Q(x) \cdot C(x) + R(x)}{Q(x)} = \frac{Q(x) \cdot C(x)}{Q(x)} + \frac{R(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Hemos convertido la función fraccionaria impropia $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en la suma de un polinomio *C(x)* y una función fraccionaria propia, donde el grado del numerador es menor que el del denominador, $\frac{R(x)}{Q(x)}$

Por lo tanto, si tenemos: $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, donde el grado de *P(x)* es mayor que el de *Q(x)*, podemos convertirla en:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int C(x)\, dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$$

y la $\int C(x)\, dx$ es de fácil resolución como hemos visto en el método de integración por descomposición, quedando por resolver la integral: $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\ dx$ que es la de una función racional propia.
Los casos que analizaremos, son todos referidos a funciones racionales propias y difieren entre si en el tipo de raíces que tiene el polinomio del denominador, es decir *Q(x)*, y los podemos clasificar en:

a) Raíces del denominador reales simples o ceros reales simples.
b) Raíces del denominador reales múltiples o combinación de raíces reales múltiples y simples.
c) Raíces del denominador imaginarias (complejos conjugados).

A continuación resolveremos los dos primeros casos, ya que el tercero corresponde a una integración en el campo complejo, que evade los temas tratados en este trabajo.

5.1 <u>Raíces Reales Simples o Ceros Reales Simples</u>

Si el polinomio del denominador tiene grado "m" tendrá "m" raíces y si son simples, serán todas distintas, es decir: $x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq \ldots \neq x_m$

Aplicando la descomposición del polinomio en factores binomiales, resulta:

$$Q(x) = b_m\,(x - x_1\,).(x - x_2\,)\ldots(x - x_m\,)$$

Consideremos además que $b_m = 1$, donde el coeficiente del término de mayor grado de $Q(x)$ es igual a uno. Si esto no ocurre, se podemos hacer lo siguiente:

$$Q_1(x) = \frac{Q(x)}{b_m} = (x - x_1\,)(x - x_2\,)\ldots(x - x_m\,)\; Q(x) = b_m\; Q_1\,(x)$$

obteniendo así un nuevo polinomio $Q_1(x)$ cuyas raíces son iguales a las de $Q(x)$ y que tiene el coeficiente del término de mayor grado igual a uno. Por consiguiente, la integral nos queda:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int \frac{P(x)}{b_m Q_1(x)}\,dx = \frac{1}{b_m}\int \frac{P(x)}{Q_1(x)}\,dx$$

donde el coeficiente del término de mayor grado del nuevo polinomio es igual a uno, con lo cual podemos afirmar que al resolver la integral $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ considerando $b_m = 1$, y no quitamos generalidad al problema.

Si hacemos:
$$\frac{\mathrm{P(x)}}{\mathrm{Q(x)}} = \frac{\mathrm{P(x)}}{(\mathrm{x - x_1})(\mathrm{x - x_2})\ldots(\mathrm{x - x_m})} = \frac{\mathrm{A}}{(\mathrm{x - x_1})} + \frac{\mathrm{B}}{(\mathrm{x - x_2})} + \frac{\mathrm{C}}{(\mathrm{x - x_3}} + \ldots + \frac{\mathrm{M}}{(\mathrm{x - x_m})}$$

efectuamos la descomposición de la función fraccionaria en una suma de fracciones simples, donde $A, B, C,..,M,$ son constantes que debemos determinar.
Si en la expresión anterior, efectuamos el pasaje de $Q(x)$ al otro miembro, resulta:

$$P(x) = \frac{A\,Q(x)}{x - x_1} + \frac{B\,Q(x)}{x - x_2} + \frac{C\,Q(x)}{x - x_3} + \ldots + \frac{M\;Q(x)}{x - x_m}$$

y reemplazando $Q(x)$ por el producto de sus factores binomiales, tenemos:

$$\mathrm{P(x)} = \frac{\mathrm{A\,(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_m)}}{\mathrm{x - x_1}} + \frac{\mathrm{B(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_m)}}{\mathrm{x - x_2}} + \ldots + \frac{\mathrm{M\,(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_m)}}{\mathrm{x - x_m}} =$$

simplificando:

$$P(x) = A(x - x_2\,)\ldots(x - x_m\,) + B(x - x_1\,)(x - x_3\,)\ldots(x - x_m\,) + \ldots + M(x - x_1\,)(x - x_2\,)\ldots(x - x_{m-1}\,)$$

A partir de esta expresión, para calcular las constantes podemos usar dos procedimientos que nos permitirán obtener idénticos resultados.

Uno de los procedimientos es el siguiente:

Hacemos $x = x_1$ tenemos:

$$\begin{aligned} P(x_1) &= A(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\dots(x_1 - x_m) + + B(x_1 - x_1)(x_1 - x_3)\dots(x_1 - x_m) + \dots + \\ &+ M(x_1 - x_1)(x_1 - x_2)\dots(x_1 - x_{m-1}) = \end{aligned}$$

y si se observa, salvo el primer término, todos los demás poseen un factor $(x_1 - x_1)$ que es igual a cero, por lo tanto, se anulan y nos queda solamente: $P(x_1) = A(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\dots(x_1 - x_m)$

Donde: $$A = \frac{P(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\dots(x_1 - x_m)}$$

De manera similar, si hacemos $x = x_2$:

$$\begin{aligned} P(x_2) &= A(x_2 - x_2)(x_2 - x_3)\dots(x_2 - x_m) + B(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\dots(x_2 - x_m) + \dots + \\ &+ M(x_2 - x_1)(x_2 - x_2)\dots(x_2 - x_{m-1}) = \end{aligned}$$

De igual manera que en el caso anterior, tendremos factores $(x_2 - x_2)$ que resultan iguales a cero y nos queda: $P(x_2) = B(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\dots(x_2 - x_m)$

Donde: $$B = \frac{P(x_2)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\dots(x_2 - x_m)}$$

y así sucesivamente, haciendo:

$x = x_3$

$x = x_4$

:

:

$x = x_{m-1}$

hasta llegar a $x = x_m$ donde:

$$\begin{aligned} P(x_m) &= A(x_m - x_2)(x_m - x_3)\dots(x_m - x_m) + B(x_m - x_1)(x_m - x_3)\dots(x_m - x_m) + \dots + \\ &+ M(x_m - x_1)(x_m - x_2)\dots(x_m - x_{m-1}) = \end{aligned}$$

Donde: $$M = \frac{P(x_m)}{(x_m - x_1)(x_m - x_2)\dots(x_m - x_{m-1})}$$

con lo cual hemos calculado los valores de las constantes: *A, B,...,M* y por lo tanto podemos resolver la integral:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int \left[\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} + \dots + \frac{M}{x - x_m} \right] dx =$$

aplicando el método de descomposición y propiedades de la integral, resultará:

$$= A\int \frac{dx}{x - x_1} + B\int \frac{dx}{x - x_2} + ... + M\int \frac{dx}{x - x_m} =$$

de esta manera nos quedarán "m" integrales del tipo:

$\int \frac{dx}{x - x_i}$ que debemos calcular por sustitución, es decir:

si $u = x - x_i \Rightarrow du = dx \Rightarrow \int \frac{dx}{x - x_i} = \int \frac{du}{u} = ln\, u + C = ln(x - x_i) + C$

por lo tanto:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx = A\, ln(x - x_1) + B\, ln(x - x_2) + ... + M\, ln(x - x_m) + C_i =$$

y aplicando propiedades de los logaritmos resultará:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx = ln\left[(x - x_1)^A (x - x_2)^B ...(x - x_m)^M\right] + Ci$$

con lo cual se ha resuelto la integral.

El otro procedimiento es más general, ya que el que hemos visto anteriormente nos sirve únicamente para el caso de raíces simples, en cambio este no solo sirve para ese caso, sino que también para los de raíces múltiples o combinación de raíces simples y múltiples. Se denomina: "Método de los Coeficientes Indeterminados" y se basa en que, a partir de:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} + \frac{C}{x - x_3} + ... + \frac{M}{x - x_m}$$

podemos llegar a:

$$P(x) = A(x - x_2)(x - x_3)...(x - x_m) + +B(x - x_1)(x - x_3)...(x - x_m) + ... +$$
$$+ M(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_{m-1}) =$$

Si resolvemos esta igualdad llegaremos a una de polinomios en "x" y por una propiedad de la igualdad de los mismos, los coeficientes de igual grado de "x" tienen que resultar iguales y, entonces esto nos permite formular un sistema de "m" ecuaciones con "m" incógnitas que son: *A, B, C,...,M*, que podemos resolver mediante alguno de los métodos para el cálculo de sistemas de ecuaciones, con lo cual obtendremos los valores de las constantes.
Luego de esto, se puede calcular la integral siguiendo el mismo procedimiento anterior.
A continuación veremos un ejemplo, que los resolveremos aplicando ambos procedimientos:

Se desea calcular: $\int \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^3 - x}\, dx =$

Donde: $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$ y $Q(x) = x^3 - x$

si calculamos las raíces del polinomio denominador:

$$Q(x) = x^3 - x = 0 \text{, entonces:}$$
$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x^2 - 1 = 0$$

y el conjunto solución de las raíces de $Q(x)$ será: $\{x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = -1\}$

por lo tanto: $Q(x) = x\,(x-1)\,(x+1)$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} =$$

Donde: $2x^2 - 3x + 1 = A(x-1)(x+1) + B\,x(x+1) + C\,x(x-1)$

si $x = 0$, entonces:

$$2(0)^2 - 3(0) + 1 = A(0-1)(x+1) + B(0)(0+1) + C(0)(0-1) \Rightarrow 1 = A(-1)(1) \Rightarrow \underline{A = -1}$$

si $x = 1$, entonces:

$$2(1) - 3(1) + 1 = A(1-1)(1+1) + B(1)(1+1) + C(1)(1-1) \Rightarrow 2 - 3 + 1 = 2B \Rightarrow 0 = 2B \Rightarrow \underline{B = 0}$$

si $x = -1$, entonces:

$$2(-1) - 3(-1) + 1 = A(-1-1)(-1+1) + B(-1)(-1+1) + C(-1)(-1-1) \Rightarrow 2 + 3 + 1 = C(-1)(-2) \Rightarrow 6 = 2C \Rightarrow \underline{C = 3}$$

con lo cual hemos calculado los tres coeficientes.

De otra manera y teniendo en cuenta que: $2x^2 - 3x + 1 = A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + C\,x(x-1)$
operando:

$$2x^2 - 3x + 1 = A(x^2 - 1) + B(x^2 + x) + C(x^2 - x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x^2 - 3x + 1 = Ax^2 - A + Bx^2 + Bx + Cx^2 - Cx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x^2 - 3x + 1 = x^2(A + B + C) + x\,(B - C) - A$$

si igualamos los coeficientes de igual grado de "x", tendremos: $\begin{cases} 2 = A + B + C \\ -3 = B - C \\ 1 = -A \end{cases}$

que resulta un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que podemos resolver por alguno de los métodos conocidos.

Aplicaremos sustitución. Si consideramos la tercera ecuación, resulta: $\underline{A = -1}$.

Si reemplazamos este valor en la primera, tendremos: $-1 + B + C = 2 \Rightarrow B + C = 3 \Rightarrow B = 3 - C$
y reemplazando en la segunda: $-3 = (3 - C) - C \Rightarrow -6 = -2C \Rightarrow \underline{C = 3}$
por lo tanto, como: $B = 3 - C \Rightarrow B = 3 - 3 \Rightarrow B = 0$

Hemos calculado los coeficientes. Podemos ahora resolver la integral.
Entonces:

$$\int \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^3 - x} dx = -1 \int \frac{dx}{x} + 3 \int \frac{dx}{x+1} = -1 \ln x + 3 \ln (x+1) + Ci =$$

$$= \ln [x^{-1}.(x+1)^3] + Ci = \ln \left[\frac{(x+1)^3}{x} \right] + Ci$$

5.2 <u>Raíces Reales Múltiples o Combinación de Reales Múltiples y Simples</u>

Consideremos *Q(x)* un polinomio de grado "m" y : m = h + k + s

y que además las raíces de *Q(x)* son:

x_1 múltiples h veces
x_2 múltiples k veces
x_3 múltiples s veces

Asimismo: $b_m = 1$

Caso contrario operamos de igual forma que en el punto anterior (5.1). Entonces resulta:

$$Q(x) = (x - x_1)^h (x - x_2)^k (x - x_3)^s$$

efectuamos la descomposición siguiente:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_0}{(x - x_1)^h} + \frac{A_1}{(x - x_1)^{h-1}} + \frac{A_2}{(x - x_1)^{h-2}} + \dots + \frac{A_{h-1}}{(x - x_1)} +$$
$$+ \frac{B_0}{(x - x_2)^k} + \frac{B_1}{(x - x_2)^{k-1}} + \frac{B_2}{(x - x_2)^{k-2}} + \dots + \frac{B_{k-1}}{(x - x_2)} +$$
$$+ \frac{C_0}{(x - x_3)^s} + \frac{C_1}{(x - x_3)^{s-1}} + \frac{C_2}{(x - x_3)^{s-2}} + \dots + \frac{C_{s-1}}{(x - x_3)} =$$

Luego, procedemos de manera similar a lo utilizado en el desarrollo de raíces reales simples, es decir, “pasamos” *Q(x)* al otro miembro, multiplicamos y realizamos las simplificaciones correspondientes.
Como en el caso anterior veremos dos formas de obtener los coeficientes.

Una, operando de manera similar al de raíces simples, utilizando el "Método de los Coeficientes Indeterminados". Efectuamos las operaciones en el segundo miembro de la igualdad y sacamos factores comunes los distintos grados de "x", obteniendo así un polinomio que es igual a *P(x)* y por propiedad de estos, para ser iguales, los coeficientes de los términos de igual grado también deben ser iguales, lo que nos permite obtener un sistema de ecuaciones (m) con la misma cantidad de incógnitas, que resolviendo obtenemos los coeficientes, que son las incógnitas.

El otro Método, llamado "Método de las Derivadas", consiste en que, luego de multiplicar ambos miembros por *Q(x)* se procede a dar a "x" los valores de las raíces, en nuestro caso x_1, x_2 y x_3; con lo cual obtendremos los coeficientes de subíndice cero $(A_0, B_0$ y $C_0)$.

Luego procedemos a derivar ambos miembros de la igualdad y dar nuevamente a "x" los valores de las raíces, obteniendo así los coeficientes de subíndice uno (A_1, B_1 y C_1 *en nuestro ejemplo).*
Si continuamos con las derivadas sucesivas, tantas veces como haga falta, obtendremos todos los coeficientes.
A continuación veremos un ejemplo, que resolveremos aplicando ambos procedimientos.

Se desea calcular la siguiente integral: $\int \frac{3x^2 - 6x + 2}{(x-1)^2(x-2)} dx =$

En este ejemplo nos dan las raíces del denominador ya calculadas, lo que nos facilita el trabajo, pero que no invalida la generalidad de los métodos, ya que obtener las raíces de un polinomio es un problema meramente algebraico.
Como el polinomio del denominador es de grado 3 debe tener tres raíces, que son:

$$x_1 = x_2 = 1 \quad \textit{raíz múltiple, de orden de multiplicidad dos}$$
$$x_3 = 2 \qquad \textit{raíz simple}$$

Teniendo en cuenta esto, hacemos la siguiente descomposición:

$$\frac{3x^2 - 6x + 2}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{A_0}{(x-1)^2} + \frac{A_1}{(x-1)} + \frac{B_0}{(x-2)}$$

Resolvemos primero por el método de los coeficientes indeterminados.

$$3x^2 - 6x + 2 = A_0(x-2) + A_1(x-1)(x-2) + B(x-1)^2$$

si resolvemos el segundo miembro obtendremos:

$$3x^2 - 6x + 2 = A_0 x - 2A_0 + A_1 x^2 - 3A_1 x + 2A_1 + Bx^2 - 2Bx + B$$

y sacando factores comunes:

$$3x^2 - 6x + 2 = x^2(A_1 + B) + x(-3A_1 - 2B + A_0) + (-2A_0 + 2A_1 + B)$$

por lo tanto:
$$\begin{cases} A_1 + B = 3 \\ A_0 - 3A_1 - 2B = -6 \\ -2A_0 + 2A_1 + B = 2 \end{cases}$$

lo que resulta un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:
A_0, A_1 y B que podemos resolver por cualquiera de los métodos conocidos. Lo hacemos por determinantes:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (4+2) - (6+1) = 6 - 7 = -1$$

$$\Delta A_0 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -6 & -3 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-9 - 4 - 12) - (-6 - 12 - 6) = 14 - 15 = -1$$

$$\Delta A_1 = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (12+2) - (12+3) = 14 - 15 = -1$$

$$\Delta B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -6 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (12+6) - (18+2) = 18 - 20 = -2$$

por lo tanto:

$$A_0 = \frac{\Delta A_0}{\Delta} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$A_1 = \frac{\Delta A_1}{\Delta} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$B = \frac{\Delta B}{\Delta} = \frac{-2}{-1} = 2$$

Hemos calculado los coeficientes. Sólo nos resta integrar.
Si aplicamos ahora el método de las derivadas resulta que, teniendo en cuenta la igualdad arribada al comenzar el otro método, tendremos:

$$3x^2 - 6x + 2 = A_0(x-2) + A_1(x-1)(x-2) + B(x-1)^2$$

si hacemos $x = 1$:

$$3(1)^2 - 6(1) + 2 = A_0(1-2) + A_1(1-1)(1-2) + B(1-1)^2 \Rightarrow 3 - 6 + 2 = A_0(-1) \Rightarrow -1 = -A_0 \Rightarrow A_0 = 1$$

si hacemos: $x=2$:

$$3(2)^2 - 6(2) + 2 = A_0(2-2) + A_1(2-1)(2-2) + B(2-1)^2 \Rightarrow 12 - 12 + 2 = B(1) \Rightarrow B = 2$$

derivamos ambos miembros de la igualdad:

$$6x - 6 = A_0 + A_1(x-2) + A_1(x-1) + 2B(x-1)$$

hacemos nuevamente $x = 1$, entonces:

$$6(1) - 6 = A_0 + A_1(1-2) + A_1(1-1) + 2B(1-1) \Rightarrow 6 - 6 = A_0 + A_1(-1) \Rightarrow B = A_0 - A_1 \Rightarrow A_0 = A_1 \Rightarrow A_1 = 1$$

y obtenemos nuevamente los coeficientes.

Ahora para resolver el ejercicio nos resta calcular las integrales:

$$\int \frac{3x^2 - 6x + 2}{(x-1)^2\,(x-2)}\,dx = \int \left[\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)} + \frac{2}{x-2} \right] dx =$$

$$\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{2}{x-2}\,dx =$$

las calculamos por separado:

$\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx =$ Resolvemos aplicando el método de sustitución:

si $u = x - 1 \Rightarrow du = dx \Rightarrow \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \int \frac{du}{u^2} = \int u^{-2}\,du = \frac{u^{-1}}{-1} = -\frac{1}{u} = \frac{1}{x-1}$

Las otras dos integrales son similares a las realizadas para el caso de raíces simples y dan como resultado siempre logaritmos neperianos. Por lo tanto:

$$\int \frac{3x^2 - 6x + 2}{(x-1)^2 (x-2)} dx = -\frac{1}{x-1} + ln(x-1) + 2\, ln(x-2) + C =$$

$$= -\frac{1}{x-1} + ln\left[(x-1)(x-2)^2\right] + C$$

6.- INTEGRACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

El cálculo de integrales de funciones trigonométricas, salvo el caso en que resultan inmediatas, se realiza utilizando el método de integración por sustitución, aunque como veremos, algunas veces hay que efectuar previamente algunos artificios matemáticos.
Resolvemos las integrales de todas las funciones trigonométricas:

$\int sen\, x\, dx = -cos\, x + C$ (integral inmediata)

$\int cos\, x\, dx = sen\, x + C$ (integral inmediata)

$\int tg\, x\, dx =$

Sabemos que: $tg\, x = \frac{sen\, x}{cos\, x}$. Reemplazamos: $\int tg\, x\, dx = \int \frac{sen\, x}{cos\, x} dx$; donde podemos aplicar el método de integración por sustitución:

$u = cos\, x \Rightarrow du = -sen\, x\, dx \Rightarrow -du = sen\, x\, dx$, entonces:

$$\int tg\, x\, dx = \int -\frac{du}{u} = -\ln u + C = -\ln(\cos x) + C$$

$\int ctg\, x\, dx =$

esta integral es similar a la anterior y en ella debemos reemplazar: $ctg\, x = \frac{cos\, x}{sen\, x}$

de lo que resulta: $\int ctg\, x\, dx = \int \frac{cos\, x}{sen\, x}\, dx$

y para sustituir hacemos: $u = sen\, x \Rightarrow du = cos\, x\, dx$

entonces: $\int ctg\, x\, dx = \int \frac{du}{u} = \ln u + C = \ln(sen\, x) + C$

$\int sec\, x\, dx =$

En este caso es necesario utilizar previamente un artificio matemático. El mismo consiste en multiplicar numerador y denominador por: $sec\, x + tg\, x$

$$\int sec\, x\, dx = \int \left[sec\, x \left(\frac{sec\, x + tg\, x}{sec\, x + tg\, x} \right) \right] dx = \int \frac{sec^2 x + tg\, x\, sec\, x}{sec\, x + tg\, x}\, dx =$$

Hacemos la siguiente sustitución:

$u = sec\,x + tg\,x \quad \Rightarrow \quad du = (sec^2\,x + tg\,x\,sec\,x)\,dx$

$$u = \int \sec x\,dx = \int \frac{du}{u} = \ln u + C = \ln(\sec x + \operatorname{tg} x) + C$$

$$\int \operatorname{cosec} x\,dx =$$

De manera similar al caso anterior multiplicamos y dividimos por: $cosec\,x - ctg\,x$

$$\int \operatorname{cosec} x\,dx = \int \left[\operatorname{cosec} x \left(\frac{\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x}{\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x}\right)\right] dx = \int \frac{\operatorname{cosec}^2 x - \operatorname{cosec} x\,.\operatorname{tg} x}{\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x}\,dx =$$

En este caso hacemos: $u = cosec\,x\;ctg\,x \;\Rightarrow\; du = (\operatorname{cosec}^2 x - \operatorname{cosec} x.\operatorname{ctg} x)\,dx$

Entonces:

$$\int cosec\,x\;dx = \int \frac{du}{u} = ln\,u + C = ln(cosec\,x - ctg\,x) + C$$

Hacemos notar que en los casos de la secante y cosecante existen otras sustituciones que permiten resolver la integral y si bien, aparentemente, los resultados a los que se arriba son distintos, se puede demostrar su igualdad, o que difieren en una constante, operando trigonométricamente.

6.1 Integración de Potencias de Funciones Trigonométricas

La integración de las potencias de las funciones trigonométricas se resuelven por aplicación del método de integración por sustitución. Generalmente resultan similares entre si todas las potencias impares, como así también todas las pares. Por lo tanto, para analizar la resolución de cada una de las funciones hacemos una subdivisión:

6.1.1 Integración de Potencias de la Función Coseno

Calculamos la integral: $\int cos^n\,x\,dx$, donde el exponente $n \in$ N y puede ser un número natural par o impar; además $n \neq 1$, ya que en ese caso, pese a ser impar, la integral resulta inmediata.

6.1.1.1 Integración de Potencias Impares de la función *cos x*

Consideremos que el exponente es impar, es decir:

$n = 2k + 1 \qquad \forall\, k \in$ N, donde reemplazando k por cada uno de los números naturales, obtendremos todos los naturales impares:

$$k = 1 \Rightarrow n = 2(1) + 1 = 3$$
$$k = 2 \Rightarrow n = 2(2) + 1 = 5$$
$$k = 3 \Rightarrow n = 2(3) + 1 = 7$$

y así sucesivamente. $\quad u = 2x \Rightarrow du = 2\,dx \Rightarrow \; du = \dfrac{dx}{2}$

Si reemplazamos n en la integral y operamos, tenemos:

$$\int \cos^n x\,dx = \int \cos^{2k+1} x\,dx = \int \cos^{2k} x\ \cos x\ dx = \int (\cos^2 x)^k \cos x\ dx =$$

Donde hemos aplicado propiedades del producto de potencias de iguales bases y de la potencia de potencia. Si consideramos ahora la relación de Pitágoras para la trigonometría, que dice:

$$\mathrm{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \quad ==> \quad \cos^2 x = 1 - \mathrm{sen}^2 x$$

reemplazamos: $\int \cos^n x\ dx = \int (\cos^2 x)^k \cos x\ dx = \int (1 - \mathrm{sen}^2 x)^k \cos x\ dx =$

Aplicando el método de integración por sustitución:

$$u = \mathrm{sen}\, x \qquad ==> \qquad du = \cos x\ dx$$

resulta: $\int \cos^n x\,dx = \int (1 - \mathrm{sen}^2 x)^k \cos x\,dx = \int (1 - u^2)^k\, du =$

y esta última integral la podemos resolver aplicando el desarrollo del Binomio de Newton:

$$\int (1-u^2)^k\,du = \int \left[1^k - \frac{k}{1!} 1^{k-1} (u^2)^1 + \frac{k(k-1)}{2!} 1^{k-2} (u^2)^2 - \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} 1^{k-3} (u^2)^3 + .. + \frac{k(k-1)(k-2)...3.2.1}{n!} (u^2)^k \right] du =$$

Para analizar el signo del último término del desarrollo, debemos tener en cuenta que el mismo consta de ($k+1$) términos y que los que ocupan una posición impar (términos 1, 3, 5, 7,...) son positivos y los de una posición par (términos 2, 4, 6, 8,...) son negativos. Por lo tanto:

<u>**Si *k* es par**</u>: el último término tiene que ser positivo ya que ocupa una posición impar (*k+1=impar*), entonces: $(-1)^k = 1$ resulta positivo.

<u>**Si *k* es impar**</u>: el último término tiene que ser negativo ya que ocupa una posición par (*k+1=par*), entonces: $(-1)^k = -1$ resulta negativo, con lo cual hemos resuelto el signo del último término del desarrollo. A continuación resolvemos las operaciones posibles y tenemos:

$$\int \cos^n x\,dx = \int \left[1 - k\,u^2 + \frac{k(k-1)}{2!} u^4 - \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} u^6 + ... + (-1)^k u^{2k} \right] du =$$

y esta última integral la podemos resolver aplicando el método de descomposición y propiedades de la integral indefinida, es decir:

$$\int \cos^n x\,dx = \int du - k \int u^2\ du + \frac{k(k-1)}{2!} \int u^4\ du - \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \int u^6\,du + ... + (-1)^k \int u^{2k}\ du =$$

Así, resultan todas integrales inmediatas. Resolviendo, nos queda:

$$\int \cos^n x\,dx = u - k\,\frac{u^3}{3} + \frac{k(k-1)}{2!}\,\frac{u^5}{5} - \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\,\frac{u^7}{7} + ... + (-1)^k\,\frac{u^{2k+1}}{2k+1} + C$$

hacemos nuevamente la sustitución: $u = \mathrm{sen}\, x$, tendremos resuelto el problema. Luego:

$$\int \cos^n x\,dx = \mathrm{sen}\, x - k\,\frac{\mathrm{sen}^3 x}{3} + \frac{k(k-1)}{2!}\,\frac{\mathrm{sen}^5 x}{5} - \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\,\frac{\mathrm{sen}^7 x}{7} + .. + (-1)^k\,\frac{\mathrm{sen}^{2k+1} x}{2k+1} + C$$

Resolvemos algunos ejercicios donde aplicaremos el método de resolución visto anteriormente.

Resolver:

a)

$$\int cos^3 x\, dx$$

$$\int cos^3 x\, dx = \int cos^{2+1} x\, dx = \int cos^2 x \; cos\, x\, dx =$$

si tenemos en cuenta que: $cos^2 x = 1 - sen^2\, x$

Entonces: $\int cos^3 x\, dx = \int (1 - sen^2 x)\, cos\, x\, dx =$

si hacemos: $u = sen\, x \Rightarrow du = cos\, x\, dx$

reemplazando y aplicando el método de descomposición resulta:

$$\int cos^3\, x\, dx = \int (1 - u^2\,)\, du = \int du - \int u^2\, du = u - \frac{u^3}{3} + C = sen\, x - \frac{sen^3 x}{3} + C$$

b)

$$\int cos^9 x\, dx$$

$$\int cos^9\, x\, dx = \int\, cos^{\,2.4+1} x\, dx = \int (cos^2\,)^4\, cos\, x\, dx = \int (1 - sen^2 x)^4\, cos\, x\, dx =$$

$$= \int (1 - sen^2 x)^4\, cos\, x\, dx =$$

aplicando sustitución hacemos: $u = sen\, x \Rightarrow du = cos\, x\; dx$

reemplazando y resolviendo resulta:

$$\int cos^9 x\, dx = \int (1 - u^2\,)^4\, du = \int \left[1 - 4u^2 + \frac{4.3}{2!}(u^2\,)^2 - \frac{4.3.2}{3!}(u^2\,)^3 + \frac{4.3.2.1}{4!}(u^2\,)^4 \right] du =$$

$$\int (1 - 4u^2 + 6u^4 - 4u^6 + u^8\,)\, du = \int du - 4\int u^2\, du + 6\int u^4\, du - 4\int u^6\, du + \int u^8\, du =$$

$$u - \frac{4u^3}{3} + \frac{6u^5}{5} - \frac{4u^7}{7} + \frac{u^9}{9} + C$$

por lo tanto: $\int \cos^9 x\, dx = \text{sen}\, x - \frac{4\,\text{sen}^3 x}{3} + \frac{6\,\text{sen}^5 x}{5} - \frac{4\text{sen}^7 x}{7} + \frac{\text{sen}^9 x}{9} + C$

6.1.1.2 Integración de Potencias Pares de la función cos x

Analicemos ahora el caso en que el exponente es par: $n = 2k \quad \forall k \in N$

Donde al igual que en el caso anterior, dándole a k los valores de cada uno de los números naturales, obtendremos todos los naturales pares, por ejemplo:

$k = 1 \Rightarrow n=2\,(1) = 2$
$k = 2 \Rightarrow n=2\,(2) = 4$
$k = 3 \Rightarrow n=2(3) = 6$

y así sucesivamente.
Si reemplazamos n en la integral y operamos, tendremos:

$$\int cos^n\ x\,dx = \int cos^{2k} x\,dx = \int (cos^2 x)^k\ dx =$$

donde hemos aplicado el concepto de potencia de otra potencia. Además consideremos las siguientes igualdades trigonométricas, a los efectos de la sustitución.

Sabemos que: $sen^2 x + cos^2 x = 1 \qquad (1)$.

y: $cos\ (\alpha + \beta) = cos\ \alpha\ cos\ \beta - sen\ \alpha\ sen\ \beta$

si hacemos: $\alpha = \beta = x$ resulta:

$cos\ (x+x) = cos\ x\ .\ cos\ x - sen\ x\ .\ sen\ x \quad \Rightarrow \quad cos\ 2x = cos^2 x - sen^2 x \qquad (2)$

Si a la igualdad (1) le sumamos la (2), resulta:

$$\begin{array}{lll} & \cos^2 x + \text{sen}^2 x & = 1 \\ + & & \\ & \underline{\cos^2 x - \text{sen}^2 x} & \underline{= \cos 2x} \\ & 2\cos^2 x & = 1 + \cos 2x \end{array}$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad (3)$$

esta última igualdad es la que utilizamos para la sustitución. Operando:

$$\int \cos^n n\,dx = \int (\cos^2 x)^k\ dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^k dx = \frac{1}{2^n} \int (1+\cos 2x)^k\ dx =$$

Aplicando el desarrollo del Binomio de Newton:

$$\int \cos^n\ x\ dx = \frac{1}{2^k} \int \left[1 + k\cos 2x + \frac{k(k-1)}{2!}\cos^2 2x + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\cos^3 2x + \ldots + \cos^k 2x\right] dx$$

Utilizando el método de integración por descomposición y propiedades de la integral indefinida resulta:

$$\int cos^n x\,dx = \frac{1}{2^k}\left[\int dx + k\int cos\,2x\,dx + \frac{k(k-1)}{2!}\int cos^2\ 2x\,dx + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\int cos^3\ 2x\,dx + .. + \int cos^k 2x\,dx\right] =$$

Solo queda resolver cada una de las integrales que aparecen en el segundo miembro de la igualdad anterior:

$I_1 = \int dx = x$ (integral inmediata)

No escribimos las constantes de integración en cada integral, ya que todas serán sumadas al final en una sola, teniendo en cuenta que la suma de un número finito de constantes nos da otra constante.

$$I_2 = \int cos\, 2x\, dx =$$

Resolvemos por sustitución: $u = 2x \Rightarrow du = 2\,dx \quad \Rightarrow \frac{du}{2} = dx$, entonces:

$$I_2 = \int \cos 2x \;dx = \int \cos u \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \cos u\, du = \frac{1}{2}\,\text{sen}\, u = \frac{1}{2}\,\text{sen}\, 2x$$

Por lo tanto: $I_2 = \frac{1}{2}\,\text{sen}\, 2x$

$$I_3 = \int \cos^2 2x\, dx$$

Este caso, que es de una potencia par, lo resolvemos haciendo la siguiente sustitución

$$u = 2x \Rightarrow du = 2\; dx \Rightarrow \frac{du}{2} = dx$$

Por lo tanto: $I_3 = \int \cos^2 2x\, dx = \int \cos^2 u\; \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \cos^2 u\, du =$

si además tenemos en cuenta la igualdad (3), resulta: $\cos^2 u = \frac{1+\cos 2u}{2}$

Entonces:

$$I_3 = \int \cos^2 2x\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{1+\cos 2u}{2}\, du = \frac{1}{4}\int (1+\cos 2u)\, du = \frac{1}{4}\left[\int du + \int \cos 2u\, du\right] =$$

donde hemos aplicado, propiedades de la integral y el método de descomposición. Las dos integrales resultan similares a I_1 e I_2 respectivamente, que hemos resuelto anteriormente. Por consiguiente: $\int du = u \quad y \quad \int cos\, 2u\, du = \frac{1}{2}\, sen\, 2u$

Entonces: $I_3 = \frac{1}{4}\left[u + \frac{1}{2}\text{sen}\, 2u\right] = \frac{1}{4}\left[2x + \frac{1}{2}\,\text{sen}\, 2\,(2x)\right] = \frac{x}{2} + \frac{1}{8}\;\text{sen}\;4x$

con lo que hemos calculado la integral I_3

$I_4 = \int cos^3\, 2x\, dx =$ Esta integral, por ser de exponente impar, se resuelve aplicando el método visto en 6.1.1.1, es decir: $\int cos^3\, 2x\, dx = \int cos^2\, 2x\, cos\, 2x\, dx = \int (1 - sen^2\, 2x)\, cos\, 2x\, dx$

si hacemos: $u = sen\, 2x \Rightarrow du = 2\, cos\, 2x\, dx \Rightarrow \frac{du}{2} = cos\, 2x\, dx$

Entonces:

$$I_4 = \int (1-u^2)\,\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int (1-u^2)\, du = \frac{1}{2}\left[\int du - \int u^2\right] = \frac{1}{2}\left[u - \frac{u^3}{3}\right] = \frac{1}{2}\left[\text{sen}\, 2x - \frac{\text{sen}^3\, 2x}{3}\right]$$

O sea: $I_4 = \dfrac{\text{sen } 2x}{2} - \dfrac{\text{sen}^3 2x}{6}$

con lo que calculamos la integral I_4

$I_5 = \int cos^4\ 2x\, dx$. Esta integral se resuelve siguiendo el proceso visto para los exponentes pares, para lo cual hacemos: $u = 2x \Rightarrow du = 2\ dx \Rightarrow \dfrac{du}{2} = dx$

por lo tanto: $\int cos^4\ 2x\, dx = \int cos^4\ u\ \dfrac{du}{2} = \dfrac{1}{2}\int\ cos^4\ u\ du = \dfrac{1}{2}\int (cos^2\ u)^2\ du$

integral ésta a la que arribamos luego de la sustitución y operando algebraicamente.

De acuerdo con la formula (3) vista anteriormente, podemos hacer: $cos^2\ u = \dfrac{1 + cos\ 2u}{2}$

reemplazando resulta: $I_5 = \int \left(\dfrac{1 + cos\ 2u}{2} \right)^2\ du$

Si a partir de esta integral continuamos operando y aplicamos el método de descomposición llegamos a:

$$I_5 = \frac{1}{8}\int (1 + \cos 2u)^2\ du = \frac{1}{8}\int (1 + 2\cos 2u + \cos^2 2u)\, du =$$

$$I_5 = \frac{1}{8}\left[\int du\ +\ 2\int \cos 2u\, du\ +\ \int \cos^2 2u\, du\right] =$$

donde:

$$\int du = I_1 \qquad ===> \qquad \int du = u$$

$$\int cos\ 2u\ \ du = I_2 \qquad ===> \qquad \int cos\ 2u\ du = \frac{1}{2}\ sen\ 2u$$

$$\int cos^2\ 2u\ du = I_3 \qquad ===> \qquad \int cos^2\ 2u\ du = \frac{u}{2} + \frac{1}{8}\ sen\ 4u$$

Integrales todas que fueron resueltas anteriormente, por lo cual conocemos sus resultados.
Asimismo, para resolver la integral propuesta, debemos sumar las integrales y sustituir $u = 2x$, es decir:

$$I_5 = \int \cos^4 2x\, dx = \frac{1}{8}(\,I_1 +\ 2\,I_2 +\ I_3) = \frac{1}{8}\left[u + 2\left(\frac{1}{2}\text{sen}\ \ 2\,u\right) + \left(\frac{u}{2} +\ \frac{1}{8}\,\text{sen}\ 4u\right)\right]$$

entonces: $I_5 = \dfrac{1}{8}\left[(2x) + \text{sen}\ 2(2x) + \dfrac{(2x)}{2} + \dfrac{1}{8}\,\text{sen}\ 4\,(2x)\right] =$

Por lo tanto: $I_5 = \dfrac{3x}{8} + \dfrac{1}{8}\ sen\ 4x + \dfrac{1}{64}\ sen\ 8x$

Luego: $I_6 = \int cos^5\ 2x\, dx$

Esta integral es del tipo de exponente impar y como tal se resuelve de manera similar a lo visto en el apartado 6.1.1.1. Por lo tanto:

$$I_6 = \int \cos^5 2x\,dx = \int (\cos^2 2x)^2 \cos 2x\,dx = \int (1 - \mathrm{sen}^2 2x)^2 \cos 2x\,dx =$$

si hacemos: $u = sen\ 2x \Rightarrow du = 2\cos 2x\,dx \Rightarrow \frac{du}{2} = \cos 2x\,dx$

sustituyendo resulta:

$$I_6 = \int (1-u^2)^2 \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int (1-2u^2+u^4)\,du = \frac{1}{2}\left[\int du - 2\int u^2\,du + \int u^4 du\right]\frac{1}{2}\left[u - 2\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5}\right] = \frac{u}{2} - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{10}$$

Reemplazando; $I_6 = \dfrac{sen\ 2x}{2} - \dfrac{sen^3\ 2x}{3} + \dfrac{sen^5\ 2x}{10}$

Con lo que se ha resuelto la integral.

Debemos continuar calculando todas las integrales que aparecen, teniendo en cuenta que son de exponente par e impar alternativamente, hasta llegar a la última, que es:

$$I_{k+1} = \int \cos^k 2x\,dx$$

donde si k es par, se resuelve de manera similar a las integrales $I_3, I_5, I_7, \ldots$ y si k es impar, entonces se analizan en forma análoga a las integrales $I_2, I_4, I_6 \ldots$

De esta manera se pueden calcular todas las integrales. Por lo tanto, la integral del coseno de x elevado a un exponente natural par, resulta igual a:

$$\int \cos^n x\,dx = \int \cos^{2k} x\,dx = \frac{1}{2^k}\left[I_1 + k\,I_2 + \frac{k(k-1)}{2!} I_3 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} I_4 + \ldots + I_{k+1}\right] + C$$

y reemplazando las I_i por los valores obtenidos anteriormente se tendrá resuelta la integral propuesta.

Ejemplo: $\int \cos^6 x\,dx$

si hacemos:

$$\int \cos^6 x\,dx = \int (\cos^2 x)^3\,dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3 dx =$$

$$\frac{1}{8}\int (1+\cos 2x)^3\,dx =$$

$$\frac{1}{8}\int (1 + 3\cos 2x + 3\cos^2 2x + \cos^3 2x)\,dx =$$

$$\frac{1}{8}\left[\int dx + 3\int \cos 2x\,dx + 3\int \cos^2 2x\,dx + \int \cos^3 2x\,dx\right]$$

es necesario calcular cada una de las integrales:

$$I_1 = \int dx = x \qquad \text{inmediata}$$

$$I_2 = \int \cos 2x\, dx = \qquad \text{se resuelve por sustitucion}$$

$$u = 2x \;\Rightarrow\; du = 2\, dx \;\Rightarrow\; \frac{du}{2} = dx$$

$$I_2 = \int \cos 2x\, dx = \int \cos u \frac{du}{2} = \frac{\text{sen } u}{2} = \frac{\text{sen } 2x}{2}$$

$$I_3 = \int \cos^2 2x\, dx \; = \text{integral de exponente par, y como tal debe ser resuelta es decir :}$$

$$\int \cos^2 2x\, dx = \int \frac{1+\cos 2(2x)}{2} dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 4x)\, dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 4x\, dx$$

donde la primera es inmediata y la segunda se resuelve por el método de sustitución, es decir:

$$u = 4x \;\Rightarrow\; du = 4\, dx \;\Rightarrow\; \frac{du}{4} = dx$$

$$\int \cos 4x\, dx = \int \cos u \frac{du}{4} = \frac{1}{4} \text{sen } u = \frac{\text{sen } 4x}{4}$$

Entonces: $I_3 = \frac{1}{2}(x) + \frac{1}{2}\frac{\text{sen } 4x}{4} = \frac{x}{2} + \frac{\text{sen } 4x}{8}$, se resuelve aplicando el procedimiento de $I_4 = \int \cos^3 2x\, dx$ exponentes impares.

Por lo tanto:

$$\int \cos^3 2x\, dx = \int \cos^2 2x \cos 2x\, dx =$$

$$\int (1 - \text{sen}^2 2x) \cos 2x\, dx =$$

Donde: $u = \text{sen } 2x \;\Rightarrow\; du = 2 \cos 2x\, dx \;\Rightarrow\; \frac{du}{2} = \cos 2x\, dx$

entonces: $I_4 = \int (1 - u^2)\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int du - \frac{1}{2}\int u^2\, du = \frac{u}{2} - \frac{u^3}{6} = \frac{\text{sen } 2x}{2} - \frac{\text{sen}^3 2x}{6}$

Hemos resuelto todas las integrales, restando solamente reemplazar para obtener el resultado final:

$$\int \cos^6 x\, dx = \frac{1}{8}\left[I_1 + 3I_2 + 3I_3 + I_4\right] + C =$$

$$\frac{1}{8}\left[(x) + 3\frac{\text{sen } 2x}{2} + 3\left(\frac{x}{2} + \frac{\text{sen } 4x}{8}\right) + \frac{\text{sen } 2x}{2} + \frac{\text{sen}^3 2x}{6}\right] + C =$$

$$= \frac{5x}{16} + \frac{\text{sen } 2x}{4} + \frac{3\,\text{sen } 4x}{64} + \frac{\text{sen}^3 2x}{24} + C$$

6.1.2 Potencias de la función Seno

Como en el caso del coseno consideremos dos posibilidades para la: $I = \int \text{sen}^n x\, dx$

donde el exponente "*n*" puede ser un número natural par o impar. Consideremos ambas posibilidades por separado.

6.1.2.1 <u>Potencia Impar de la función *sen x*</u>

De la misma manera que en el coseno, si el exponente es impar, podemos escribir:

$$n = 2k + 1 \qquad \forall k \in N$$

si reemplazamos en la integral y operamos algebraicamente, resulta:

$$\int sen^n\ x\, dx = \int sen^{2k+1}\ x\, dx = \int (sen^2\ x)^k\ sen\ x\, dx =$$

Si consideramos: $\quad sen^2 x + cos^2 x = 1 \qquad sen^2\ x = 1 + cos^2\ x$

y reemplazamos en la integral anterior, tendremos:

$$\int sen^n x\, dx = \int (1 - cos^2 x)^k\ sen\ x\, dx =$$

aplicamos el método de sustitución: $\quad u = cos\ x \ \Rightarrow\ du = -\ sen\ x\ dx \ \Rightarrow\ -du = sen\ x\ dx$

por lo tanto: $\quad \int sen^n x\, dx = \int (1 - u^2\ )^k\ (-du) = - \int (1 - u^2\ )^k\ du$

Para desarrollar esta última integral aplicamos el Binomio de Newton:

$$- \int (1 - u^2\ )\, du = - \int \left[1 - k\, u^2 + \frac{k(k-1)}{2!} u^4 - \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} u^6 + ... + (-1)^k\ u^{2k} \right] du$$

En cuanto al signo del último término, son válidas las mismas consideraciones hechas para la integral de las potencias impares de la función coseno.
Aplicamos el método de integración por descomposición y propiedades de la integral indefinida.

$$\int sen^n\ x\, dx = - \left[\int du - k \int u^2\ du + \frac{k(k-1)}{2!} \int u^4\ du - \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \int u^6\ du + ... + (-1)^k \int u^{2k}\ du \right]$$

Integrales que podemos resolver fácilmente, ya que resultan inmediatas. Si además tenemos en cuenta el signo menos exterior al corchete, el mismo nos cambiará todos los signos de las integrales, por lo tanto, el del último término también variará, por lo cual es necesario sumarle una unidad al exponente. Entonces resulta:

$$\int sen^n\ x\ dx = -\ u + k\ \frac{u^3}{3} - \frac{k(k-1)}{2!}\ \frac{u^5}{5} + \frac{k * k-1)(k-2)}{3!}\ \frac{u^7}{7} + ... + (-1)^{k+1}\ \frac{u^{2k+1}}{2k+1} + C$$

sustituyendo u tenemos resuelta la integral:

$$\int sen^n x\ dx = -\cos x + \frac{k \cos^3 x}{3} - \frac{k(k-1)}{2!}\ \frac{\cos^5 x}{5} + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\ \frac{\cos^7 x}{7} + ... + (-1)^{k+1}\ \frac{\cos^{2k+1} x}{2k+1} + C$$

Resolvemos una serie de ejercicios donde aplicaremos este método:

Resolver: $\int sen^3x\, dx = \int sen^3 x\, dx = \int sen^2x\, dx = \int (1 - cos^2x)\, sen\, x\, dx =$

Si hacemos: $u = cos\ x \Rightarrow du = -sen\ x\ dx \Rightarrow -du = sen\ x\ dx$

Por lo tanto:

$$\int sen^3x\, dx = \int (1 - u^2)\,(-du) = -\int (1 - u^2)\, du = -\int du + \int u^2\, du = -u + \frac{u^3}{3} + C = -cos\, x + \frac{cos^3 x}{3} + C$$

Resolver: $\int sen^9\, x\, dx = \int sen^9x\, dx = \int (sen^2x)^4 sen\, x\, dx = \int (1 - cos^2x)\, sen\, x\, dx =$

si hacemos: $u = cos\ x \Rightarrow du = -\ sen\ x\ dx \Rightarrow -du = sen\ x\ dx$

$$\int sen^9x\, dx = \int (1 - u^2)^4\,(-du) = -\int (1 - 4u^2 + 6u^4 - 4u^6 + u^8)\, du =$$

$$= -\int du + 4\int u^2\, du - 6\int u^4\, du + 4\int u^6\, du - \int u^8\, du =$$

$$= -\ u + 4\frac{u^3}{3} + 6\frac{u^5}{5} + 4\frac{u^7}{7} - \frac{u^9}{9} + C =$$

$$= -cos\, x + \frac{4\, cos^3\, x}{3} - \frac{6\, cos^5\, x}{5} + \frac{4\, cos^7\, x}{7} - \frac{cos^9\, x}{9} + C$$

6.1.2.2 Potencia Par de la función *sen x*

Consideremos ahora que el exponente es un número natural par. Por lo tanto:

$$n = 2k \qquad \forall k \in N$$

entonces: $\int sen^n\ x\, dx = \int sen^{2k} x\, dx = \int (sen^2 x)^k\ dx =$

A los efectos de la sustitución consideremos las siguientes igualdades trigonométricas:

Relacion de Pitágoras: $cos^2x + sen^2x = 1 \qquad (1)$

$cos^2x - sen^2x = cos\, 2x \qquad (2)$

restando ambas igualdades: $2\, sen^2x = 1 - cos\, 2x$

y haciendo pasaje de terminos: $sen^2x = \dfrac{1 - cos\, 2x}{2} \qquad (3)$

La expresión (2) podemos hallarla de la siguiente manera: $cos\ (a+b) = cos\ a\ cos\ b - sen\ a\ sen\ b$

si hacemos $a = b = x$ resulta: $cos\ (x+x) = cos\ x\ cos\ x - sen\ x\ sen\ x$

Por lo tanto: $cos\, 2x = cos^2 x - sen^2\ x$

La expresión (3) es la que utilizamos para resolver la integral. Por consiguiente:

$$\int sen^n\ x\,dx = \int \left(\frac{1 - cos\,2x}{2}\right)^k\ dx =$$

Donde, de manera similar a la integración de la función coseno, podemos aplicar propiedades de la integral indefinida y el desarrollo del Binomio de Newton, es decir:

$$\int sen^n x\,dx = \frac{1}{2^k}\int (1 - cos\,2x)^k\ dx = \frac{1}{2^k}\int \left[1 - k\,cos\,2x + \frac{k(k-1)}{2!}cos^2\ 2x - \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}cos^3\ 2x + ... + (-1)^k\ cos^k\,2x\right]dx =$$

y continúa siendo válida la consideración del signo del último término hecha anteriormente.
Aplicamos el método de integración por descomposición y propiedades de la integral:

$$\int sen^n x\,dx = \frac{1}{2^k}\left[\int dx - k\int cos\,2x\,dx + \frac{k(k-1)}{2!}\int cos^2 2x\,dx - \frac{k)k-1)(k-2)}{3!}\int cos^3 2x + ... + (-1)^k\int cos^k\,2x\,dx\right]$$

Donde aparecen las siguientes integrales:

$$I_1 = \int dx =$$

$$I_2 = \int \cos 2x\,dx =$$

$$I_3 = \int \cos^2\ 2x\,dx =$$

$$I_4 = \int \cos^3\ 2x\,dx =$$

.

.

.

$$I_k = \int \cos^k\ 2x\,dx =$$

Todas estas integrales fueron resueltas oportunamente cuando estudiamos la función coseno con exponente par.

Por lo tanto: $\int sen^n x\,dx = \frac{1}{2^k}\left[I_1 - k\,I_2 + \frac{k(k-1)}{2!}I_3 - \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}I_4 + ... + (-1)^k\ I_{k+1}\right] + C$

restando reemplazar los valores de las I_i por los resultados obtenidos anteriormente para lograr la solución final de la integral propuesta.

Ejercitación:

Resolver: $\int sen^4\ x\,dx =$

Consideremos:

$$\int \text{sen}^4\text{x dx} = \int (\text{sen}^2\text{x})^2\ \text{dx} = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2\ \text{dx} = \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)^2\ \text{dx} =$$

$$= \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos\ 2x + \cos^2\ 2x)\,\text{dx} = \frac{1}{4}\int \text{dx} - 2\int \cos 2x\,\text{dx} + \int \cos^2\ 2x\,\text{dx}$$

Calculamos por separado cada una de las integrales, es decir:

$$I_1 = \int dx = x$$

$$I_2 = \int cos\, 2x\, dx =$$

integral que resolvemos por sustitución:

$$u = 2x \;\Rightarrow\; du = 2\, dx \;\Rightarrow\; \frac{du}{2} = dx$$

$$\int cos\, 2x\, dx = \int cos\, u\, \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int cos\, u\, du = \frac{1}{2}\, sen\, u$$

$$I_2 = \frac{sen\, 2x}{2}$$

$$I_3 = \int cos^2\, 2x\, dx = \int \frac{1 + cos\, 2(2x)}{2}\, dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int cos\, 4x\, dx$$

La integral de cos 4x la resolvemos por sustitución: $u = 4x$ $\quad du = 4\, dx$ $\quad \frac{du}{4} = dx$

entonces:

$$I_3 = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\int cos\, u\, \frac{du}{4} = \frac{x}{2} + \frac{sen\, u}{8} =$$

$$I_3 = \frac{x}{2} + \frac{sen\, 4x}{8}$$

reemplazamos:

$$\int sen^4 x\, dx = \frac{1}{4}\left[I_1 - 2I_2 + I_3\right] + C = \frac{1}{4}\left[x - 2\left(\frac{sen\, 2x}{2}\right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{sen\, 4x}{8}\right)\right] + C = \frac{3x}{8} + \frac{sen\, 2x}{4} + \frac{sen\, 4x}{32} + C$$

6.1.3 <u>Integración de Potencias de la función Tangente</u>

Estas integrales tienen genéricamente la forma: $\quad I = \int tg^n x\, dx$

Existen varias maneras de resolver dichas integrales: utilizando sustituciones diferentes y aunque parezca que los resultados obtenidos son distintos, no es así. Se puede demostrar trigonométricamente, que en todos difieren entre si solamente en una constante.
En el presente trabajo se resolverá por uno de dichos métodos, que se considera de más fácil aplicación y consiste en utilizar la siguiente relación trigonométrica:

$$1 + tg^2 x = sec^2 x \;\Rightarrow\; tg^2 x = sec^2 x - 1$$

por lo tanto:

$$\int tg^n x\, dx = \int tg^{n-2} x\, tg^2 x\, dx = \int tg^{n-2}\, x\, (sec^2 x - 1)\, dx = \int tg^{n-2} x\, sec^2 x\, dx - \int tg^{n-2} x\, dx$$

Podemos resolver la integral: $\quad I_1 = \int tg^{n-2} x\, sec^2 x\, dx =$

Aplicando el método de sustitución: $\quad u = tg\, x \;\Rightarrow\; du = sec^2 x\, dx$

resulta: $I_1 = \int u^{n-2}\ du = \frac{u^{n-1}}{n-1} = \frac{tg^{n-1}\ x}{n-1}$

Restaría resolver la integral: $I_2 = \int tg^{n-2} x\ dx$

Donde podemos reiterar la aplicación del método anterior. Entonces:

$$I_2 = \int tg^{n-2}x\ dx = \int tg^{n-4}x\ tg^2 x\ dx = \int tg^{n-4}x\ (sec^2 x - 1)\ dx = \int tg^{n-4}x\ sec^2 x\ dx - \int tg^{n-4}x\ dx =$$

Donde: $I_3 = \int tg^{n-4}\ sec^2 x\ dx =$

Se resuelve por sustitución al igual que la integral I_1, es decir: $I_3 = \int u^{n-4}\ du = \frac{u^{n-3}}{n-3} = \frac{tg^{n-3} x}{n-3}$

Restando resolver la integral: $I_4 = \int tg^{n-4} x\ dx$, que se obtiene de manera similar a las anteriores, es decir, se debe reiterar el procedimiento hasta llegar a la última integral. Esta depende del exponente "n". Si es par, será del tipo:

$$\int tg^2 x\ dx = \int (sec^2 x - 1)\ dx = \int sec^2 x\ dx - \int dx = tg^2\ x - x + C$$

Si el exponente "n" es impar, entonces la última integral será del tipo:

$$\int tg\ x\ dx = \int \frac{sen\ x}{cos\ x}\ dx = -\int \frac{du}{u} = -\ln u + C =$$

Integral que fue resuelta por sustitución: $u = cos\ x \Rightarrow du = -\ sen\ x\ dx$

Por lo tanto: $\int tg\ x\ dx = -\ln(cos\ x) + C$

y si reemplazamos cada una de las integrales en las anteriores, solucionamos el problema.

Ejercitación:

Resolver: a) $\int tg^5 x\ dx =$

$$\int tg^5 x\ dx = \int tg^3 x\ tg^2 x\ dx = \int tg^3 x\ (sec^2 x - 1)\ dx = \int tg^3 x\ sec^2 x\ dx - \int tg^3 x\ dx =$$
$$= \int tg^3 x\ sec^2 x\ dx - \int tg^2 x\ tg\ x\ dx = \int tg^3 x\ sec^2 x\ dx - \int tg\ x\ (sec^2 x - 1)\ dx =$$
$$= \int tg^3 x\ sec^2 x\ dx - \int tg\ x\ sec^2 x\ dx + \int tg\ x\ dx =$$

donde las dos primeras integrales se resuelven por sustitución:

$$u = tg\ x \Rightarrow du = sec^2 x\ dx$$

la última, de la siguiente manera: $\int tg\ x\, dx = \int \frac{sen\ x}{cos\ x}\, dx$

donde: $w = cos\ x \Rightarrow dw = -\, sen\ x\, dx$

aplicando sustituciones resulta:

$$\int tg^5 x\, dx = \int u^3\, du - \int u\, du + \int -\frac{dw}{w} = \frac{u^4}{4} - \frac{u^2}{2} - \ln w + C = \frac{tg^4 x}{4} - \frac{tg^2 x}{2} - \ln(\cos x) + C$$

b) $\int tg^6 x\, dx$

$$\int tg^6 x\, dx = \int tg^4 x\, tg^2 x\, dx = \int tg^4 x\, (sec^2 x - 1)\, dx = \int tg^4 x\, sec^2 x\, dx = \int tg^4 x\, dx =$$

$$= \int tg^4 x\, sec^2 x\, dx - \int tg^2 x\, tg^2 x\, dx =$$

$$\int tg^4 x\, sec^2 x\, dx - \int tg^2 x\, (sec^2 x - 1)\, dx = \int tg^4 x\, sec^2 x\, dx - \int tg^2 x\, sec^2 x\, dx + \int tg^2 x\, dx =$$

$$= \int tg^4 x\, sec^2 x\, dx - \int tg^2 x\, sec^2 x\, dx + \int sec^2 x\, dx - \int dx =$$

$$= \int tg^4 x\, sec^2 x\, dx - \int tg^2 x\, sec^2 x\, dx + \int sec^2 x\, dx - \int dx =$$

donde podemos resolver las tres primeras integrales por sustitución:

$$u = tg\ x \Rightarrow du = sec^2\ x\, dx$$

y la última resulta inmediata. Por lo tanto:

$$\int tg^6 x\, dx = \int u^4\, du - \int u^2\, du + \int du - \int dx = \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + u - x + C = \frac{tg^5 x}{5} - \frac{tg^3 x}{3} + tg\ x - x + C$$

6.1.4 Integración de Productos de Potencias de las Funciones Seno y Coseno

Estas integrales tienen genéricamente la forma: $I = \int sen^n x\, cos^m x\, dx$, donde se pueden plantear distintas alternativas de acuerdo a que los exponentes sean pares o impares. Analizaremos por separado.

6.1.4.1 Potencia de la Función Seno Impar y del Coseno Par

El exponente del coseno es un número natural par y del seno impar:

$$m = par \Rightarrow m = 2h \quad \forall h \in N$$
$$n = impar \Rightarrow n = 2k + 1 \quad \forall k \in N_0$$

por lo tanto:

$$I = \int sen^n x\, cos^m x\, dx = \int sen^{2k+1} x\, cos^m x\, dx = \int sen^{2k} x\, sen\ x\, cos^m x\, dx = \int (sen^2 x)^k\, sen\ x\, cos^m x\, dx =$$

Donde usamos propiedades de las potencias y del producto de potencias de igual base, y si además tenemos en cuenta que: $sen^2\ x = 1 - cos^2\ x$

Reemplazando, resulta: $I = \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^m x \, \text{sen}\, x \, dx =$

integral que podemos resolver por el método de sustitución, haciendo:

$u = \cos x \Rightarrow du = -\text{sen}\, x\, dx \Rightarrow -du = \text{sen}\, x\, dx$

Por lo tanto:

$$I = \int (1 - u^2)^k u^m (-du) = -\int (1 - u^2)^k u^m \, du =$$

integral que resulta de fácil resolución aplicando el desarrollo del Binomio de Newton y el método de integración por descomposición.

<u>Ejemplo</u>: $I = \int \text{sen}^5 x \cos^4 x \, dx =$

$$I = \int \text{sen}^5 x \cos^4 x \, dx = \int \text{sen}^4 x \, \text{sen}\, x \cos^4 x \, dx = \int (\text{sen}^2 x)^2 \, \text{sen}\, x \cos^4 \, dx = \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^4 x \, \text{sen}\, x \, dx =$$

hacemos la siguiente sustitución: $u = \cos x \Rightarrow du = -\,\text{sen}\, x\, dx$

Por lo tanto:

$$I = \int (1 - u^2)^2 u^4 (-du) = -\int (1 - 2u^2 + u^4)\, u^4 \, du = -\int (u^4 - 2u^6 + u^8)\, du = -\int u^4 du + 2\int u^6 \, du - \int u^8 du =$$

$$= -\frac{u^5}{5} + 2\frac{u^7}{7} - \frac{u^9}{9} + C = -\frac{\cos^5 x}{5} + 2\frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^9 x}{9} + C$$

6.1.4.2 <u>Potencias de la Función Seno Par y del Coseno Impar</u>

En este caso, el exponente del coseno es un número natural impar y el del seno, par:

$m = \text{impar} \Rightarrow m = 2h + 1 \quad \forall h \in N_0$

$n = \text{par} \Rightarrow n = 2k \quad \forall k \in N$

Por lo tanto:

$$I = \int \text{sen}^n x \cos^m x \, dx = \int \text{sen}^n x \cos^{2h+1} x \, dx = \int \text{sen}^n x \cos^{2h} x \cos x \, dx = \int \text{sen}^n x (\cos^2 x)^h \cos x \, dx =$$

$$= \int \text{sen}^n x (1 - \text{sen}^2 x)^h \cos x \, dx =$$

hacemos la siguiente sustitución: $u = \text{sen}\, x \Rightarrow du = \cos x \, dx$

Por lo tanto: $I = \int u^n (1 - u^2)^h \, du =$

nos queda una integral similar a la del caso anterior, aplicamos el desarrollo del Binomio de Newton y el método de integración por descomposición.

<u>Ejemplo</u>:

$$I = \int \text{sen}^4 x \cos^3 x \, dx = \int \text{sen}^4 x \cos^3 x \, dx = \int \text{sen}^4 x \cos^2 x \cos x \, dx = \int \text{sen}^4 x (1 - \text{sen}^2 x) \cos x \, dx =$$

hacemos la siguiente sustitución: $u = sen\,x \;\Rightarrow\; du = cos\,x\,dx$

Por lo tanto:

$$I = \int u^4 (1-u^2)\,du = \int (u^4 - u^6)\,du = \int u^4\,du - \int u^6\,du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + C = \frac{sen^5 x}{5} - \frac{sen^7 x}{7} + C$$

6.1.4.3 <u>Potencias de la Función Seno Impar y del Coseno Impar</u>

En este caso, ambos exponentes son números naturales impares:

$m = impar \;\Rightarrow\; m = 2h + 1 \quad \forall h \in N_0$

$n = par \;\Rightarrow\; n = 2k + 1 \quad \forall k \in N_0$,

Esta integral puede resolverse de dos maneras. Una reemplazando el coseno en función del seno y la otra el seno en función del coseno. Si bien aparentemente los resultados a que se llegan de ambas maneras son distintos, se puede demostrar trigonométricamente que difieren solamente en una constante.

Presentamos uno de los procedimientos:

$$I = \int sen^n x\, cos^m x\, dx = \int sen^n x\, cos^{2h+1} x\, dx = \int sen^n x\,(cos^2 x)^h\, cos\,x\,dx = \int cos^n x\,(1 - sen^2 x)^h\, cos\,x\,dx =$$

si hacemos la siguiente sustitución: $u = sen\,x \;\Rightarrow\; du = cos\,x\,dx$

reemplazando, resulta: $I = \int u^n\,(1-u^2)^h\,du$

Nos queda una integral similar a la de los casos anteriores y como tal se resuelve.

Ejemplo: $I = \int sen^3 x\, cos^3 x\, dx$

$$I = \int sen^3 x\, cos^3 x\, dx = \int sen^3 x\, cos^2 x\, cos\,x\,dx = \int sen^3 x\,(1 - sen^2 x)\,cos\,x\,dx =$$

si hacemos la siguiente sustitución: $u = sen\,x \qquad du = cos\,x\,dx$

resulta:

$$I = \int u^3 (1-u^2)\,du = \int (u^3 - u^5)\,du = \int u^3\,du - \int u^5\,du = \frac{u^4}{4} - \frac{u^6}{6} + C = \frac{sen^4 x}{4} - \frac{sen^6 x}{6} + C$$

6.1.4.4 <u>Potencias de la función Seno Par y del Coseno Par</u>

Aquí ambos exponentes son números naturales pares:

$m = par \;\Rightarrow\; m = 2h \quad \forall h \in N$

$n = impar \;\Rightarrow\; n = 2k \quad \forall k \in N$

Como en el caso anterior, esta integral puede ser resuelta de dos maneras: sustituyendo el seno o el coseno, llegando en ambos a resultados análogos. Plantearemos una de las formas:

$$I = \int sen^n x\, cos^n x\, dx = \int sen^{2k} x\, cos^{2h}\ x\, dx =$$

$$\int (sen^2 x)^k\ cos^{2h} k\, dx = \int (1 - cos^2 x)^k\ cos^{2h} x\, dx =$$

En esta última expresión podemos aplicar el desarrollo del Binomio de Newton y posteriormente el método de integración por descomposición:

$$I = \int cos^{2h} x \left[1 - k\, cos^2 x + \frac{k(k-1)}{2!} cos^4 x - \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} cos^6\ x + .. + (-1)^k\ cos^{2k} x \right] dx =$$

$$= \int cos^{2h} x\ dx - k \int cos^{2h+2} x\ dx + \frac{k(k-1)}{2!} \int cos^{2h+4} x\ dx - \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \int cos^{2h+6} x\ dx + .. + (-1)^k \int cos^{2h+2k} x\ dx =$$

Podemos observar que todas las integrales son de la función coseno con exponente par. Estas pueden ser resueltas de acuerdo a lo oportunamente analizado en el apartado 6.1.1.2.

<u>**Ejemplo**</u>: $I = \int sen^2 x\ \ cos^2 x\ \ dx$

$$I = \int sen^2 x\, cos^2 x\ dx = \int (1 - cos^2 x)\, cos^2 x\ dx = \int (cos^2 x - cos^4 x)\ dx = \int cos^2 x\ dx - \int cos^4 x\ dx =$$

Tenemos dos integrales del tipo coseno con exponente par. Las resolvemos por separado:

Es decir: $I_1 = \int cos^2\ x\, dx =$

Para poder calcular esta integral hacemos la siguiente sustitución:

$$cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$I_1 = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x)\ dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x\ dx =$$

donde la integral de cos 2x se resuelve por sustitución: $u = 2x$ $du = 2\ dx$ $dx = \dfrac{du}{2}$

Por lo tanto: $\int cos\ 2x\, dx = \int cos\, u\, \dfrac{du}{2} = \dfrac{1}{2} \int cos\, u\ du = \dfrac{1}{2}\, sen\, u = \dfrac{1}{2}\, sen\ 2x$

reemplazando: $I_1 = \int cos^2 x\, dx = \dfrac{x}{2} + \dfrac{sen\ 2x}{4}$

Resolvemos la otra integral:

$$I_2 = \int cos^4 x\ dx = \int (cos^2 x)^2\ dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)\ dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int dx + 2 \int \cos 2x\ dx + \int \cos^2\ 2x\ dx \right] =$$

las resolvemos por separado: $\int dx = x$

$\int cos\,2x\,dx = \dfrac{sen\,2x}{2}$ fue resuelta en la integral anterior.

$\int cos^2\,2x\,dx =$ la resolvemos mediante la siguiente sustitución:

$$u = 2x \qquad du = 2\,dx \qquad dx = \frac{du}{2}$$

$\int cos^2\,2x\,dx = \int cos^2\,u\,\dfrac{du}{2} = \dfrac{1}{2}\int cos^2 u\,du =$ integral que también fue resuelta:

$$\int cos^2\,2x\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{u}{2} + \frac{sen\,2u}{4}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2x}{2} + \frac{sen\,4x}{4}\right] = \frac{x}{2} + \frac{sen\,4x}{8}$$

Por lo tanto:

$$I_2 = \int cos^4 x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{sen\,2x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{sen\,4x}{16} =$$

es decir: $I_2 = \int cos^4 x\,dx = \dfrac{3x}{4} + \dfrac{sen\,2x}{2} + \dfrac{sen\,4x}{16}$

resulta entonces que: $I = I_1 + I_2$

Luego:

$$\mathrm{I} = \int \mathrm{sen}^2\mathrm{x}\,\cos^2\mathrm{x}\,\mathrm{dx} = \left[\frac{\mathrm{x}}{2} + \frac{\mathrm{sen}\,2\mathrm{x}}{4}\right] + \left[\frac{3\mathrm{x}}{4} + \frac{\mathrm{sen}\,2\mathrm{x}}{2} + \frac{\mathrm{sen}\,4\mathrm{x}}{16}\right] + \mathrm{C} = \frac{5\mathrm{x}}{4} + \frac{3\,\mathrm{sen}\,2\mathrm{x}}{4} + \frac{\mathrm{sen}\,4\mathrm{x}}{16} + \mathrm{C}$$

Con lo que queda resuelto el ejercicio.