# *INTEGRALES DEFINIDAS*

## 1.- CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA

La medida del área es un problema que ha preocupado al hombre desde la antigüedad. Los egipcios conocían reglas para el cálculo de las áreas y volúmenes de algunas figuras sencillas como ser: triángulos, rectángulos, trapecios etc.

Recién los griegos dieron derivaciones lógicas y sistemáticas a estas fórmulas. Podemos citar a Arquímedes como el que más se acercó al concepto moderno del cálculo de área. Su método, llamado de exhaución, consistía en acotar el área a calcular mediante dos conjuntos de rectángulos, uno situado en el interior, cuya suma permitía obtener un **área contenida** (suma interior) y el otro, que lo cubre y da el **área continente** (suma exterior).

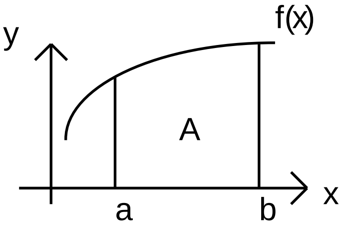
A medida que se aumentaba la cantidad de rectángulos de cada uno de los dos conjuntos considerados, dichas sumas eran cada vez más similares, lo cual permitía calcular el área deseada, por la aproximación de ambas.

Posteriormente, distintos autores adoptaron este principio y lograron el concepto de integral definida, de los cuales, veremos dos.

## 2.- INTEGRAL DEFINIDA SEGÚN CAUCHY

Si consideramos una función $y = f(x)$ positiva y continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, su gráfica conjuntamente con el eje "x" y las ordenadas correspondientes a los extremos del intervalo limitan una región del plano, cuya forma se designa como **trapezoide** y a cuya superficie o área *(A)* la llamaremos la integral definida de la función entre los límites o extremos que corresponden a los del intervalo. Es decir:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$




Para calcular dicha área procedemos a dividir el intervalo $[a,b]$ en un número finito de subintervalos, cuyos tamaños o amplitud pueden ser todas iguales o distintos, lo cual va a constituir una **partición** de dicho intervalo.

La máxima distancia entre dos puntos cualquiera de un subintervalo constituye el **diámetro** del mismo y el mayor de todos los diámetros de los subintervalos componentes de la partición, la **norma** de la misma.

Además, si consideramos dos particiones distintas de un mismo intervalo y una tiene menor norma que la otra, se dice que dicha partición es más refinada o más fina que la otra. Asimismo, es necesario tener en cuenta que si una función es continua en un intervalo cerrado, lo será también en cada uno de los subintervalos que se generan en él mediante una partición cualquiera y si consideramos que una propiedad de la función continua en un intervalo cerrado es la de alcanzar un **máximo** (M) y un **mínimo** (m) en dicho intervalo, esto mismo deberá ocurrir en cada subintervalo. Es decir, podemos afirmar que en cada uno de los subintervalos que se originan por una determinada partición del intervalo $[a,b]$ existirá un máximo ($M_i$) y un mínimo ($m_i$).

Por lo tanto, si hacemos una partición del intervalo considerado en "***n***" partes, que pueden ser todas iguales o distintas, nos quedarían los siguientes subintervalos:

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],[x_2,x_3],\ldots,[x_{i-1},x_i],\ldots,[x_{n-1},x_n]$$

Donde resulta: $a = x_0 \le x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_{i-1} \le x_i \le \cdots \le x_n = b$, y además podemos suponer que dicha partición tiene una determinada norma $\delta$.

También, existirán un máximo y mínimo en cada uno de los subintervalos, que llamaremos:

$M_1 \wedge m_1 \quad$ *los del* $[x_0,x_1]$

$M_2 \wedge m_2 \quad$ *los del* $[x_1,x_2]$

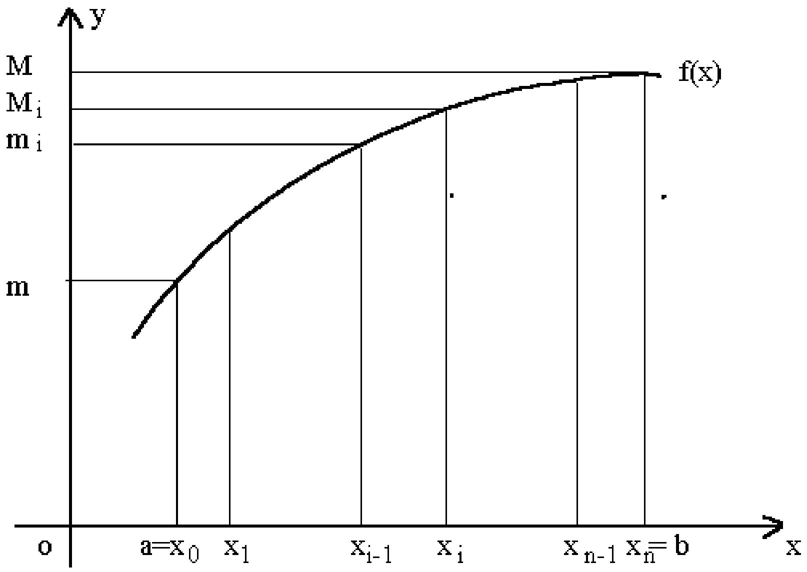
$\vdots$

$M_i \wedge m_i \quad$ *los del* $[x_{i-1},x_i]$

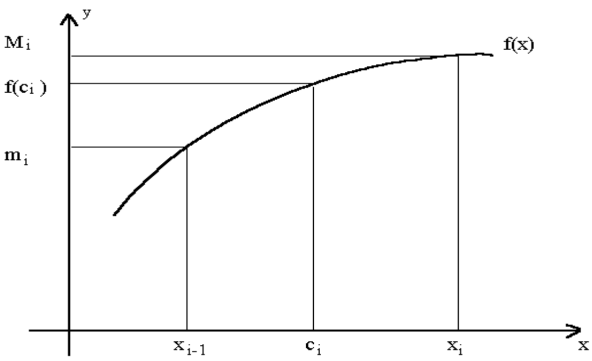
$\vdots$

$M_n \wedge m_n \quad$ *los del* $[x_{n-1},x_n]$

Teniendo en cuenta lo expresado anteriormente podemos calcular un área inferior y otra superior en cada subintervalo de la partición. A manera de ejemplo, lo haremos en un subintervalo genérico de ella:




Para mayor claridad haremos el gráfico con el subintervalo genérico únicamente, entendiendo que lo mismo ocurre en los " n" subintervalos correspondientes de la partición:




Podemos ver que el área superior corresponde a la superficie de un rectángulo de base igual a la amplitud del subintervalo y de altura, el máximo del mismo. De manera similar, el área inferior tiene la misma base, pero su altura corresponde al mínimo. Por lo tanto:

$$A_{S_i} = M_i\left(x_i - x_{i-1}\right)$$

$$A_{I_i} = m_i\left(x_i - x_{i-1}\right)$$

, y además se puede expresar el área de un rectángulo intermedio, comprendido entre los otros dos, teniendo en cuenta que entre el máximo y el mínimo del subintervalo van a estar comprendidos todos los valores de la función . Por lo tanto:

$$x_{i-1} \le c_i \le x_i \Rightarrow m_i \le f(c_i) \le M_i$$

Podemos plantear el área media de la siguiente manera: $A_{M_i} = f(c_i)(x_i - x_{i-1})$ de tal forma que se cumpla siempre que: $A_{I_i} \le A_{M_i} \le A_{S_i}$

Esto mismo deberá cumplirse para cada uno de los subintervalos en que se encuentra dividido el intervalo mediante la partición. Por lo tanto, podemos expresar:

$$\begin{array}{ccccc}
A_{I_1} & \le & A_{M_1} & \le & A_{s_1} \\
A_{I_2} & \le & A_{M_2} & \le & A_{S_2} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
A_{I_i} & \le & A_{M_i} & \le & A_{s_i} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
A_{I_n} & \le & A_{M_n} & \le & A_{S_N}
\end{array}$$

Si sumamos las *"**n**"* desigualdades planteadas, obtendremos otra desigualdad del mismo sentido que resulta:

$$A_{I_1} + A_{I_2} + \cdots + A_{I_n} \le A_{M_1} + A_{M_2} + \cdots + A_{M_n} \le A_{S_1} + A_{S_2} + \cdots + A_{S_n}$$

Es decir:

$$\sum_{i=1}^{n} A_{I_i} \le \sum_{i=1}^{n} A_{M_i} \le \sum_{i=i}^{n} A_{S_i}$$

Ahora bien, si tomamos particiones cada vez más refinadas (aumentando el número de subintervalos) las tres áreas se aproximan entre si, por lo tanto se puede suponer que si el número de subintervalos tiende a infinito (por consiguiente la norma tiende a cero) las tres áreas tenderán a igualarse. Teniendo en cuenta esto, podemos suponer que en el límite para el número de subdivisiones tendiendo a infinito serán iguales, por lo tanto:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} A_{I_i} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} A_{M_i} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} A_{S_i}$$

A dichos límites los denominaremos la **integral definida** de la función $y = f(x)$ en el intervalo cerrado $[a,b]$ y ello nos posibilita calcular el área real encerrada por la función, el eje de las abscisas (x) y las ordenadas correspondientes a los extremos del intervalo, Es decir:

$$\boxed{A_R = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} A_{M_i} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i).(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)dx}$$

Definición de la **Integral definida (según Cauchy)**

## 3.- INTEGRAL DEFINIDA SEGÚN RIEMANN

Riemann plantea otro enfoque de la integral definida, ya no como límite, sino como sucesiones y además puede prescindir de la hipótesis de continuidad, bastando solamente con el acotamiento de la función.

Sea $y = f(x)$ una función acotada en un intervalo cerrado $[a,b]$ y en ella se pueden efectuar particiones, las que llamaremos: $P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots, P_n, \ldots$, con la condición que sean cada vez más refinadas entre sí. Si llamamos: $\delta_1$ a la norma de $P_1$, $\delta_2$ a la de $P_2$, $\delta_3$ a la de $P_3$, y así respectivamente, se debe verificar que: $\delta_1 \geq \delta_2 \geq \delta_3 \geq \ldots \geq \delta_n \geq \ldots$

Teniendo en cuenta esto, podemos obtener, de acuerdo con lo visto, la suma inferior y superior para cada partición. Por lo tanto, para la partición $P_1$ existirá una suma superior, que llamaremos $S_{P_1}$ y una inferior, $I_{P_1}$ y así respectivamente para cada una de ellas, y si consideramos además, que por ser las particiones cada vez más refinadas, se debe verificar: $S_{P_1} > S_{P_2} > S_{P_3} > \ldots\ldots > S_{P_n} > \ldots\ldots$, lo que constituye una sucesión decreciente de sumas superiores, que debe ser acotada inferiormente y tener, por lo tanto, un extremo inferior, que llamaremos:

$$\text{extr. inf. } [S_P]$$

De igual manera, las sumas inferiores constituirán una sucesión creciente, es decir:

$I_{P_1} < I_{P_2} < I_{P_3} < \ldots < I_{P_n} < \ldots$, que también debe ser acotada superiormente y por consiguiente tener un extremo superior que designaremos:

$$\text{extr. sup. } [I_P]$$

A dichos extremos, que siempre existen, los llamaremos:

$$extr.inf\ .[S_P]=\overline{\int_a^b} f(x)dx=$$

lo que constituye la **Integral superior de Riemann** y a:

$$extr.sup\ .[I_P]=\underline{\int_a^b} f(x)dx=$$

que es la **Integral inferior de Riemann.**

Se va a verificar siempre que: $\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx$

La condición de existencia de la integral definida según Riemann es que ambas sean iguales:

$$\boxed{\underline{\int_a^b} f(x)dx=\overline{\int_a^b} f(x)dx=\int_a^b f(x)dx}$$

Lo que constituye la definición de **Integral definida (según Riemann).**

## 4.- PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Las propiedades de la linealidad de la integral indefinida vistas y demostradas anteriormente, se verifican en el caso de la integral definida, de manera similar.

### 4.1.- Integral definida de una suma de funciones

Demostraremos a continuación que:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$$

Consideramos la definición de integral definida:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})[f(c_i)+g(c_i)]=$$

Aplicando la propiedad distributiva del producto respecto de la suma:

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[(x_i-x_{i-1})f(c_i)+(x_i-x_{i-1})g(c_i)]=$$

Por propiedad de la sumatoria, podemos descomponer en dos sumatorias resulta:

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})f(c_i)+\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})g(c_i)\right]=$$

Por propiedad del límite de una suma, que es igual a la suma de los límites, tenemos que:

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(c_i) + \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})g(c_i) =$$

Si consideramos que:

$$\int_b^a f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\ f(c_i) \wedge$$

$$\int_a^b g(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\ g(c_i)$$

Reemplazamos en la expresión anterior:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

**4.2.- Integral definida del producto de una función por una constante**

Vamos a demostrar que: $\int_a^b k\ f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

Por definición de la integral definida:

$$\int_a^b k\ f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\,k\ \ f(c_i) =$$

Si aplicamos primero las propiedades de las sumatorias que nos permiten sacar fuera del signo las constantes y luego la del límite del producto que nos dice que es igual al producto de los límites, resultará:

$$= \lim_{n\to\infty} k\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(c_i) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} k\ \ \lim_{n\to\infty}\sum(x_i - x_{i-1})f(c_i) =$$

Si calculamos los límites, tendremos que el primero es el límite de una constante que resulta igual a la misma constante y el segundo es la definición de la integral definida de una función, por lo tanto:

$$\int_a^b k\ f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

Otras propiedades, que son propias de la integral definida:

**4.3.- Integral definida con extremos de integración iguales**

En esta propiedad vamos demostrar que:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Para ello tendremos en cuenta lo visto en la definición de integral definida:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}) \quad (1)$$

Si llamamos M al máximo y m al mínimo de todo el intervalo cerrado $[a,b]$ debe resultar que:

$M_i \leq M \wedge m_i \geq m$ , se debe verificar:

$$M_i (x_i - x_{i-1}) \leq M(x_i - x_{i-1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M(x_i - x_{i-1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}) \leq M \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}) \leq M(b-a)$$

Donde se pudo extraer M del signo de sumatoria por no depender de los subintervalos considerados, es decir de "i", y además, la sumatoria de todos los subintervalos de la partición nos va a dar el intervalo completo. De manera similar se puede analizar para el mínimo. Luego:

$$m_i (x_i - x_{i-1}) \geq m(x_i - x_{i-1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) \geq \sum_{i=1}^{n} m(x_i - x_{i-1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) \geq m \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) \geq m(b-a)$$

Reemplazando en la formula (1):

$$m(b-a) \leq \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \leq M(b-a)$$

Y como se quiere hallar la integral cuyos extremos de integración coinciden, entonces el intervalo será $[a \; , a]$ cuya amplitud es, $a - a = 0$. Por lo tanto:

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \leq 0$$

Aplicando límite para ¨***n***¨ tendiendo a infinito :

$$\lim_{n\to\infty} 0 \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \geq \lim_{n\to\infty} 0$$

Como resulta que el límite de cero es el mismo valor por ser una constante y teniendo en cuenta el Teorema de Confrontación entre límites podemos ver que:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) = 0$$

y dicho límite resulta la integral definida:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

**<u>4.4.- Integral definida de intervalos negativos (o inversión de los extremos de integración)</u>**

Veremos que: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ , donde la integral del segundo miembro corresponde a un intervalo negativo, ya que ¨*a*¨ es menor que ¨*b*¨ y entonces la amplitud del intervalo da un resultado negativo, es decir: $a < b \;\Rightarrow\; a - b < 0$

Para demostrar esta propiedad utilizaremos la definición de la integral definida.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{1-1})f(c_i)$$

$$\int_b^a f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x_{i-1} - x_i)f(c_i)$$

Si analizamos esta última expresión tendremos que:

$$\int_b^a f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x_{i-1} - x_i)f(c_i) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} -(x_i - x_{i-1})f(c_i) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} -\sum_{i=1}^{n}(x_{i-1} - x_i)f(c_i) =$$

$$= -\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(c_i) = -\int_a^b f(x)dx$$

Expresión que podemos llegar teniendo en cuenta que, como todos los términos de la sumatoria son negativos, la misma será negativa y por eso se pude sacar el signo menos afuera y además, se considera que el límite de la opuesta de una función es la opuesta del límite, con lo cual llegamos a la integral definida negativa, por lo tanto:

$$\boxed{\begin{array}{l}\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx\end{array}}$$

## 4.5.- Propiedad aditiva del intervalo en la integral definida

Demostremos que: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx =$ , para lo cual debemos considerar las posibles ubicaciones del punto ¨*c* ¨, es decir, si el punto pertenece al intervalo *[ a , b ]* o si no pertenece al mismo, y en ese caso si se encuentra a la izquierda (menor que *a* ) o a la derecha (mayor que *b*).

### a) El punto $c \in (a, b)$, es un punto interior a dicho intervalo

En ese caso podemos hacer: $[a, b] = [a, c] \cup [c, b]$

Por lo tanto, si efectuamos una partición del intervalo, la misma originará una similar en cada uno de los subintervalos. Es decir, si dividimos el intervalo en ¨***n***¨ partes podemos suponer que los subintervalos se dividirán en ¨*k* ¨ y ¨*n-k*¨ partes, siendo ¨ $k < n$ ¨ , ambos naturales. Entonces podemos hacer:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{k}(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=k+1}^{n}(x_i - x_{i-1})$$

Si multiplicamos por $f(c_i)$ siendo $x_{i-1} \le c_i \le x_i$ resulta:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(c_i) = \sum_{i=1}^{k}(x_i - x_{i-1})f(c_i) + \sum_{i=k+1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(c_i)$$

S aplicamos límite para $n \to \infty$, podemos pensar que $k \to \infty$, es decir, la norma del intervalo tenderá a cero y por consiguiente también lo harán las de los subintervalos. Entonces: $(\delta \to 0)$

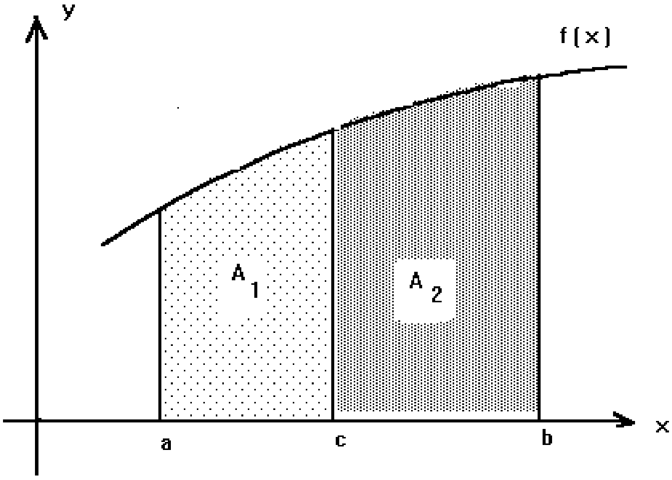
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(c_i) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k}(x_i - x_{i-1})f(c_i) + \lim_{n\to\infty}\sum_{i=k+1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(c_i)$$

Donde se ha aplicado la propiedad del límite de una suma y como dichos límites representan las integrales definidas respectivas, tenemos demostrado que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx =$$

Gráficamente podemos observar:




$$A=\int_a^b f(x)\,dx$$

Si llamamos: $A_1=\int_a^c f(x)\,dx$ Resulta:

$$A_2=\int_c^b f(x)\,dx$$

$A=A_1+A_2$ donde el área total es igual a la suma de las áreas 1 y 2.

**b) el punto c $\notin$ [ a , b ] $\wedge$ c < a**

Tendremos ahora dos subintervalos $[c, a] \wedge [c, b]$ de tal manera que resulte:

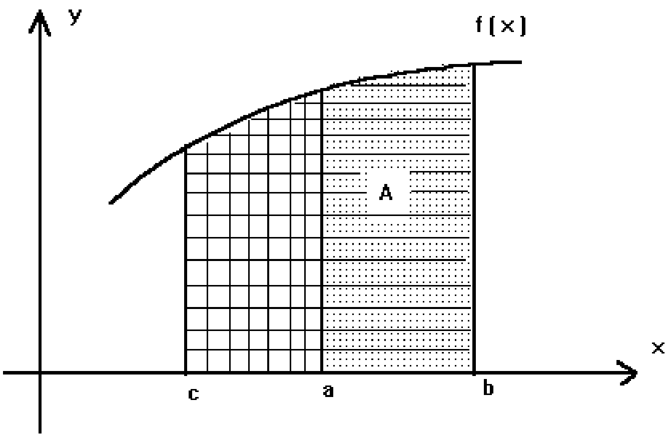
$[a, b] = [c, b] - [c, a]$ y entonces :

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx=$$

Pero, por ser el intervalo de integración negativo va a ser: $\int_a^c f(x)dx=-\int_c^a f(x)dx$

y reemplazando tenemos: $\int_a^b f(x)dx=\int_c^b f(x)dx-\int_c^a f(x)dx=$

Gráficamente:




Donde el área a determinar (sombreada con puntos) resulta igual a la diferencia entre el área sombreada con líneas horizontales menos la de líneas verticales.

**c) El punto c $\notin$ [ a , b ] $\wedge$ b < c**

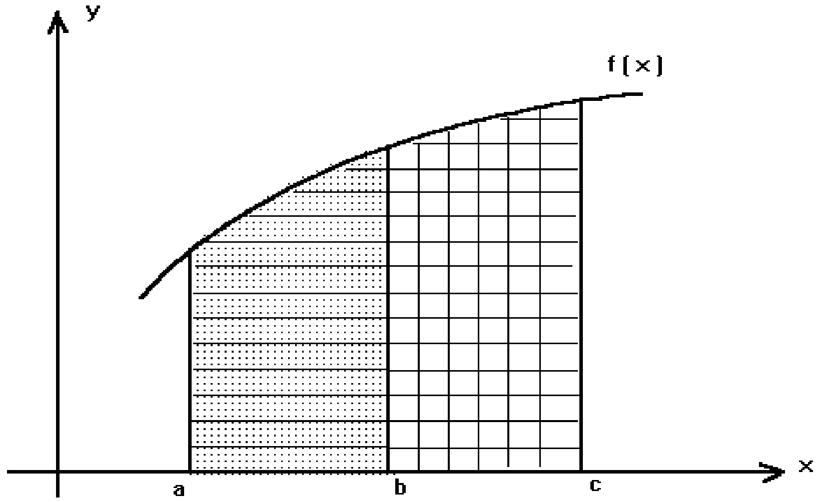
Sean los subintervalos *[ a , c ]* $\wedge$ *[ b , c ]*, de tal manera que resulta : *[ a , b ] = [ a , c ] - [ b , c ]*, y por lo tanto:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Pero, por ser el intervalo de integración negativo: $\int_c^b f(x)dx = -\int_b^c f(x)dx$

Reemplazando, tenemos: $\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx =}$

Gráficamente:




Donde

El área a determinar (sombreada con puntos) resulta igual a la diferencia entre el área sombreada con líneas horizontales menos las de líneas verticales.

## 5.- TEOREMA DE LA MEDIA DEL CÁLCULO INTEGRAL ( O DEL VALOR MEDIO)

Sea *f(x)*, función definida y acotada en un $[a;b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a)$

Demostración: como $f(x)$ está acotada en $[a, b]$, admitirá en dicho intervalo un valor máximo ( $M$ ) y otro valor mínimo ( $m$ ), de tal manera que debe verificarse que:

$$m \le f(x) \le M \quad \forall x \in [a, b]$$

Si además consideramos una partición de dicho intervalo, resultará un conjunto de subintervalos los que serán todos acotados y por consiguiente también tendrán máximos y mínimos, los que llamaremos respectivamente $M_i \wedge m_i$. donde resulta: $m \le m_i \quad \wedge \quad M_i \le M$

Por lo tanto se debe verificar:

$$M_i(x_i - x_{i-1}) \le M(x_i - x_{i-1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} M(x_i - x_{i-1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \le M \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \le M(b-a)$$

Extraemos M del signo sumatoria por no depender de los subintervalos considerados, es decir de "i", y además, la sumatoria de todos los subintervalos de la partición nos va a dar el intervalo completo. De manera similar se puede analizar para el mínimo:

$$m_i(x_i - x_{i-1}) \geq m(x_i - x_{i-1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \geq \sum_{i=1}^{n} m(x_i - x_{i-1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \geq m \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \geq m(b-a)$$

, teniendo en cuenta que cuando definimos la Integral Definida según Cauchy dijimos:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

Por lo tanto, considerando las expresiones anteriores, resulta:

$$m(b-a) \leq \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \leq M(b-a)$$

Si aplicamos límite con el número de subintervalos tendiendo a infinito (o la norma de la partición tendiendo a cero) resulta :

$$\lim_{n\to\infty} m(b-a) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \lim_{n\to\infty} M(b-a)$$

Pero como ni el máximo, ni el mínimo, ni la amplitud del intervalo dependen de la partición considerada, los podemos considerar como constantes y por lo tanto su límite da lo mismo y entonces teniendo en cuenta la definición de integral definida según Cauchy, resulta:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Si dividimos todo por (b - a), como el intervalo es positivo, la desigualdad no se altera y nos queda:

$$m \leq \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)dx \leq M$$

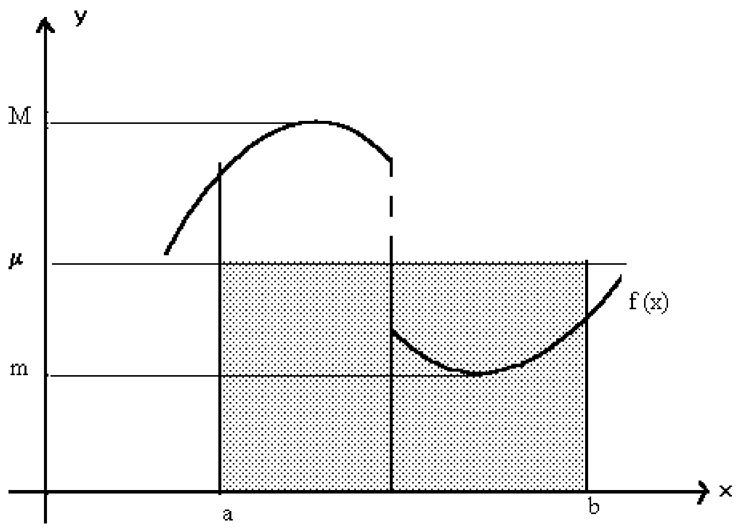
Llaman a esta expresión: $\frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)dx = \mu$

Luego: $m \leq \mu \leq M$ . μ es un valor comprendido entre el Máximo y el Mínimo, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$$

El área calculada por la Integral Definida puede ser sustituida (o resulta igual) por un área rectangular equivalente, multiplicando la amplitud del intervalo por el valor ¨mu ¨ *( $\mu$ )*, que está comprendido entre el máximo y el mínimo de la función en el intervalo.

Gráficamente:




Lo

Lo sombreado representa el área equivalente.

Ahora bien, si además de ser acotada, la función es continua (hay que tener en cuenta que toda función continua en un intervalo cerrado es siempre acotada en el mismo, no siempre es cierto el recíproco) podemos afirmar que va a existir un punto ¨*c* ¨ interior al intervalo, de tal manera que se verifique:

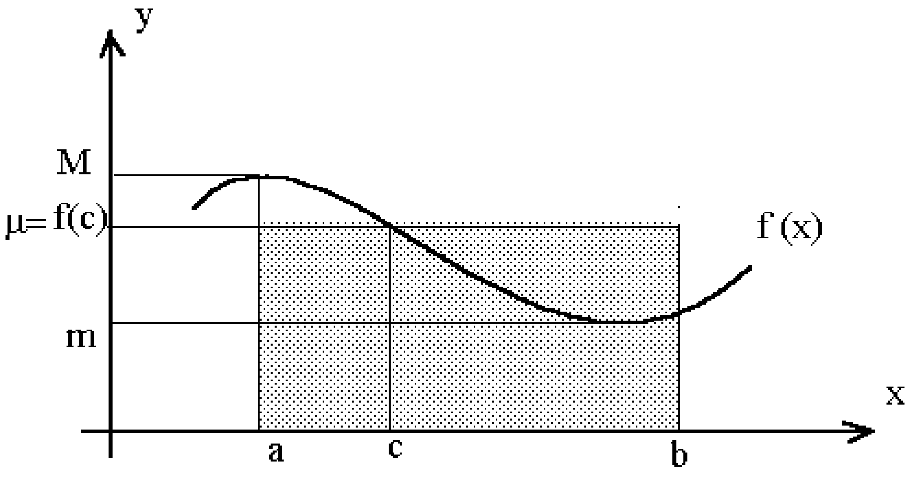
$$\mu = f(c) \qquad \wedge \qquad c \in (a, b)$$

Teniendo en cuenta que todos los valores comprendidos entre el máximo y el mínimo están ocupados por valores de la función en el intervalo ( esto no ocurre en funciones acotadas en el intervalo como se ve en el gráfico anterior ). Entonces:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = (b-a) f(c)}$$

Donde el área equivalente ahora está constituida por el intervalo multiplicado por la función en un punto interior del mismo.

Gráficamente:




Nuevamente lo sombreado representa el área equivalente.

## 6.- TEÓREMA DE LA FUNCIÓN ÁREA (O DE LA PRIMITIVA O DE LA DERIVADA DE LA FUNCIÓN INTEGRAL)

Algunos autores llaman a este Teorema como el Fundamental de la Integral y esto tiene sus razones, ya que nos va a relacionar la integral indefinida (operación) con la definida (cálculo de área) y por lo tanto nos permitirá resolver fácilmente esta última.

Para demostrar este teorema, sea una función $y = f(x)$ continua en el intervalo cerrado $[a , b]$ , y teniendo en cuenta que: $\int_a^b f(x)dx = N^o$ , corresponde a un área, podemos pensar que si sustituimos el extremo superior de la integral por una variable ¨x ¨ con la condición de que esta pertenezca al intervalo considerado, obtendremos una función de este extremo, que se denomina **Función Integral** (o Función Área), y nos dará un área variable. Es decir:

$$\int_a^x f(x)dx = F(x)$$

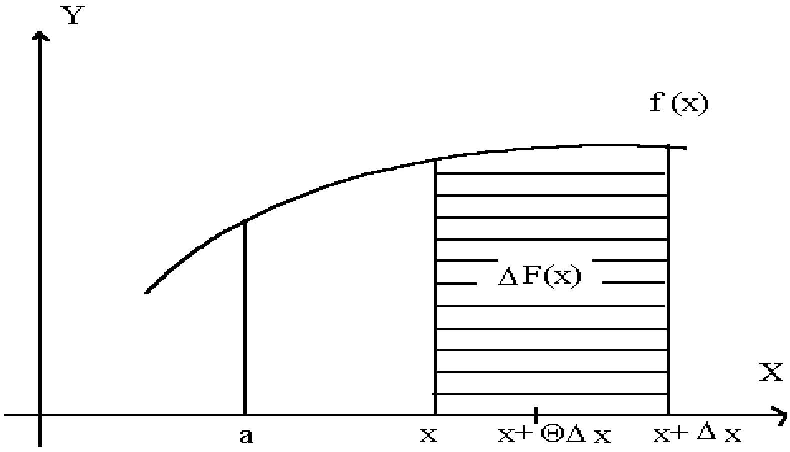
Si incrementamos el extremo superior, obtendremos una función incrementada, entonces:

$$\int_a^{x+\Delta x} f(x)dx = F(x+\Delta x)$$

y haciendo la diferencia, obtendremos el incremento de la función integral:

$$\Delta F(x) = F(x+\Delta x) - F(x)$$
$$= \int_a^{x+\Delta x} f(x)dx - \int_a^x f(x)dx$$

Como podemos observar en el grafico siguiente donde el incremento es el área sombreada:




Si además tenemos en cuenta la propiedad de la integral definida, que dice:

$$\int_a^x f(x)dx = -\int_x^a f(x)dx$$

$$\Delta F(x) = F(x+\Delta x) - F(x) =$$

podemos hacer: $= \int_a^{x+\Delta x} f(x)dx + \int_x^a f(x)dx = \int_x^{x+\Delta x} f(x)dx$

Hemos aplicado la propiedad aditiva del intervalo en la integral definida y por el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral, considerando que la amplitud del intervalo es $\Delta x$ y que $\Theta$ es un valor comprendido entre cero y uno: $0 < \Theta < 1$ , entonces $(x + \Theta\Delta x)$ en un punto interior del intervalo, resulta:

$$\Delta F(x) = F(x+\Delta x) - F(x) =$$

$$= \int_x^{x+\Delta x} f(x)dx = \Delta x\, f(x+\Theta\Delta x)$$

Dividimos por $\Delta x$ tendremos: $\dfrac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x+\Theta\Delta x)$

pasando al límite para $\Delta x$ tendiendo a cero, resulta:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Theta\Delta x)$$

Entonces:

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

Lo cual nos permite afirmar que la que la función integral es una primitiva de la función integrando, por consiguiente, se podría calcular la función integral mediante la utilización de la integral indefinida.

## 7.- REGLA DE BARROW

Si *G(x)* es una primitiva de *f(x)*, función continua en $[\,a;b\,] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) = G(x)\,\Big|_a^b = [G(x)]_a^b$

Demostración: esta regla nos permite calcular una integral definida por aplicación de una primitiva y se basa en si dos funciones tienen igual derivada, ambas difieren en una constante (Teorema Fundamental del Cálculo Integral). Por lo tanto:

$$\left.\begin{array}{l} G(x)\,es\;una\;primitiva\,de\;f(x) \Rightarrow G'(x) = f(x) \\ F(x)\,es\;una\;primitiva\,de\;f(x) \Rightarrow F'(x) = f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow F'(x) = G'(x) = f(x \Rightarrow F(x) = G(x) + K$$

siendo: $$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$$

si hacemos $x = a$ , resulta: $$F(a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

por ser los extremos de integración iguales, pero además:

$$F(a) = G(a) + K = 0 \quad \Rightarrow K = -G(a)$$

si hacemos $x = b$, tendremos: $$F(b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

y también: $F(b) = G(b) + K = G(b) - G(a)$

Igualamos las dos expresiones anteriores resulta: $$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

que es la Regla de Barrow, que se puede también de la siguiente manera:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = [G(x)]_a^b = G(x)\Big|_a^b = G(b) - G(a)}$$

Un ejemplo de aplicación de esta Regla:

Calcular la integral entre 1 y 3 de la función $y = x^2$

Para resolver procedemos de la siguiente manera:

$$\int_1^3 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{26}{3}$$

## INTEGRALES IMPROPIAS

**1.- INTRODUCCION:**

La integral definida, vista anteriormente, tenía en cuenta que la función estaba definida en todos los puntos de un intervalo cerrado [a, b], finito, y en el cual, por lo menos, la misma tenía que ser acotada, es decir, no se admiten que existan puntos del intervalo en que la función tienda a infinito (discontinuidades infinitas).

Estas restricciones sobre la característica de la función y del intervalo son posibles de flexibilizar para poder resolver algunas aplicaciones prácticas que son útiles.

Para ello, desde el punto de vista matemático, se le debe dar un nuevo enfoque a la integral definida, obteniéndose con ello las integrales impropias.

Estas se originan por dos causas, y teniendo en cuenta esto, se clasifican. Puede ocurrir que el intervalo de integración no sea finito, por lo tanto, tiene uno o los dos extremos infinitos, y la integral será **Impropia de Primera Especie**, o que la función presente un infinito en el intervalo (no esté definida en un punto del mismo) y en ese caso es **Impropia de Segunda Especie**.

Veremos cómo se resuelven.

**2.- Integrales Impropias de Primera Especie**

En este caso, el intervalo de integración es infinito y en general se resuelven reemplazando el extremo infinito por una variable *( t )* y luego aplicar límite para *t* tendiendo a infinito.

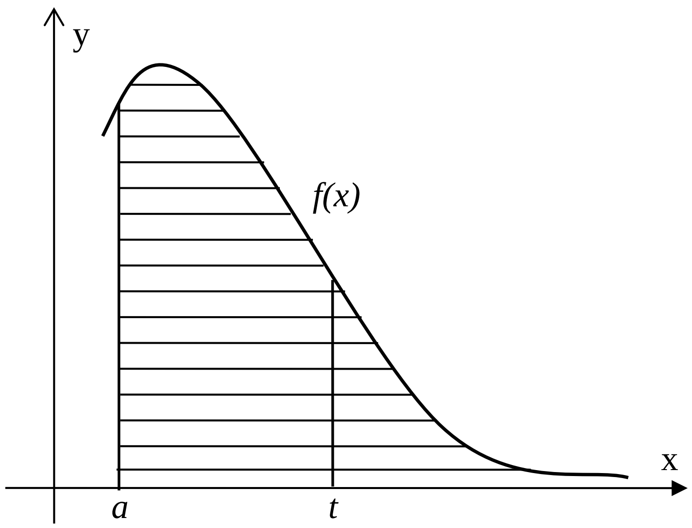
El resultado de este límite puede ser un valor finito. En este caso se dice que la integral impropia es convergente. Si el límite es infinito, la integral impropia será divergente y si no existe el límite la integral impropia será oscilante.

Analizamos cada una de las alternativas que se presentan:

**a) El extremo superior de la integral es infinito**

En este caso la integral a resolver es: $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$

Su gráfico podría ser el siguiente:

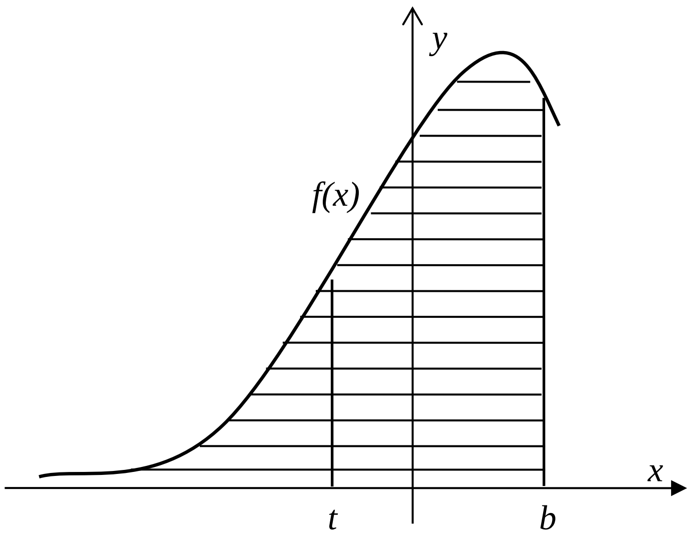


Para poder resolverla es necesario adaptar el extremo superior de la integral, variable " $t$ " y aplicar límite tendiendo a infinito, es decir: $\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^{t} f(x)\,dx =$

**b) El extremo inferior de la integral es infinito**

Ahora la integral a calcular resulta: $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$

Y podemos suponer su que su gráfico es el siguiente:

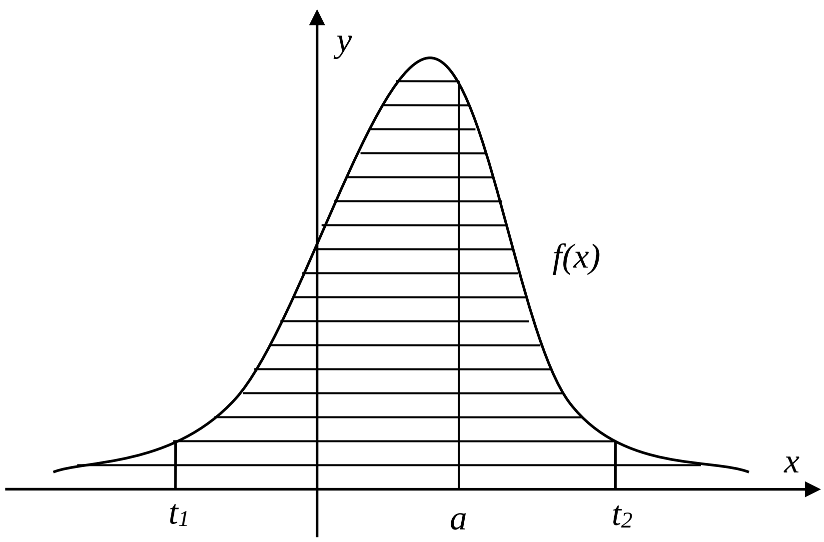



Ahora es necesario reemplazar el extremo inferior por la variable " $t$ " y aplicar límite tendiendo a menos infinito, por lo tanto: $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^{a} f(x)\,dx =$

**c) Ambos extremos son infinitos**

Entonces la integral a resolver es del tipo: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx =$

Y su grafica puede ser:



En este caso es necesario descomponer el intervalo de integración en la suma de otros dos. Para ello hay que adoptar un valor intermedio del mismo " *a* ". Aplicamos una propiedad vista en la integral definida (propiedad aditiva del intervalo de integración) y, entonces tenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$$

Por consiguiente es preciso resolver dos integrales impropias similares a las vistas en los casos anteriores, por lo tanto, vamos a reemplazar los extremos infinitos por las variables " $t_1$ " y " $t_2$ " respectivamente y a continuación aplicamos los límites tendiendo a menos y más infinito respectivamente, es decir: $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t_1 \to -\infty} \int_{t_1}^{a} f(x)\,dx + \lim_{t_2 \to +\infty} \int_{a}^{t_2} f(x)\,dx$$

## 3.- INTEGRALES IMPROPIAS DE SEGUNDA ESPECIE

En este caso la función presenta una discontinuidad infinita en un punto del intervalo, es decir, no está acotada en el mismo. Las posibilidades que se presentan son: que dicho punto singular se encuentre en uno de los extremos, o en el interior del intervalo, lo que nos dará los distintos casos, que en general se resuelven de la misma forma.

Para resolver es necesario desplazarnos del punto donde se presenta la discontinuidad y luego pasar al límite del nuevo extremo tendiendo a dicho punto.

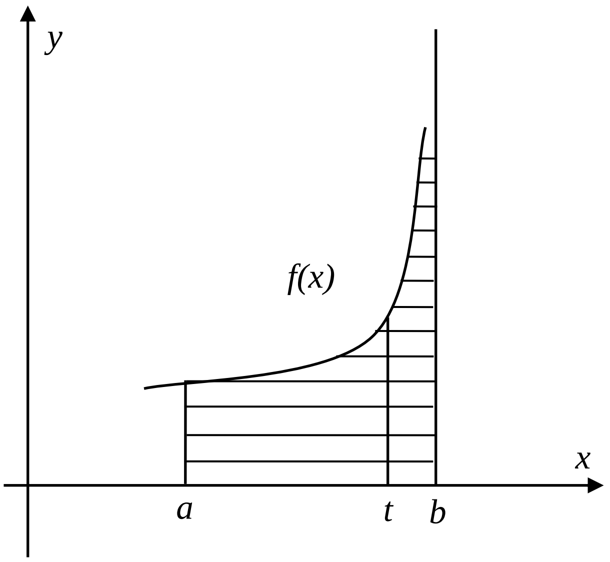
El límite, en general, es lateral, dado que debemos tender a la discontinuidad por un solo lado y al igual que en las de primera especie, puede ser finito o infinito, los que nos dará una integral impropia convergente o divergente según sea el resultado.

Analizamos los distintos casos que se presentan:

**a) El punto de discontinuidad infinita se encuentra ubicado en el extremo superior del intervalo de integración**

La integral a resolver será: $$\int_{b}^{a} f(x)\,dx \quad \wedge \quad no\ \ existe\ \ f(b)$$

Podemos suponer un gráfico como el siguiente:



Existen dos formas de planear el problema, que por supuesto llegan al mismo resultado. Una de ellas es suponer un extremo superior de la integral variable *t*, próximo a *b*, dentro del intervalo y luego hacer tender el mismo al extremo superior por izquierda, es decir: $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b} \int_a^t f(x)\,dx$

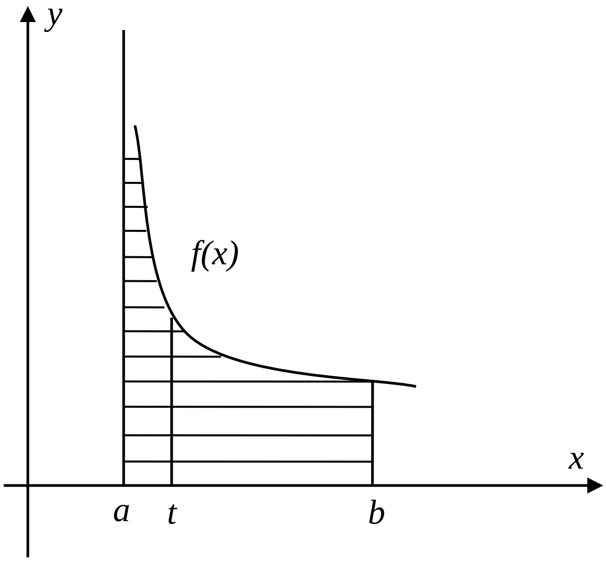
La otra manera se puede considerar un valor $\varepsilon$, positivo y variable, y reemplazar el extremo superior de la integral por la diferencia $b - \varepsilon$, y pasar al límite para $\varepsilon$ tendiendo a cero, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

**b) <u>El punto de discontinuidad infinita se encuentra ubicado en el extremo inferior del intervalo de integración</u>**

En este caso tenemos: $\int_a^b f(x)\,dx \quad \wedge \quad \text{no existe } f(a)$

Podemos considerar el siguiente gráfico:



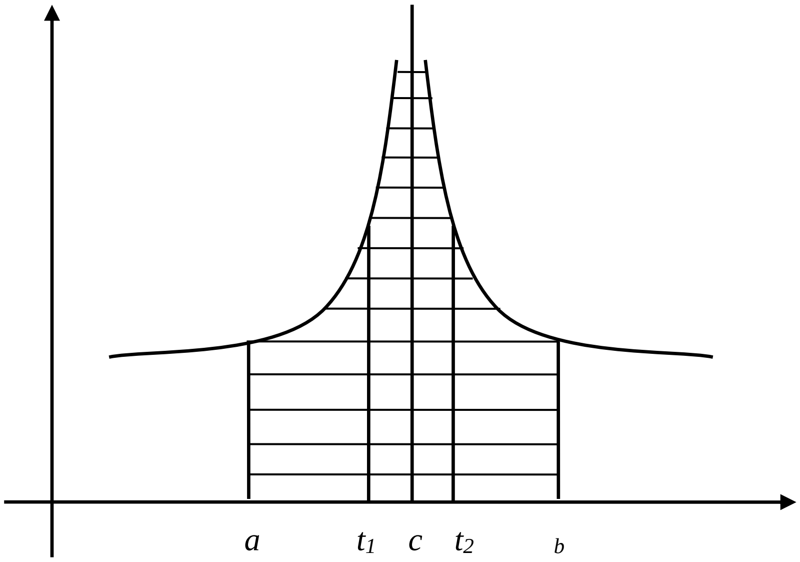

Y procedemos de manera similar al caso anterior, es decir: $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$

O también: $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$

**c) <u>El punto de discontinuidad infinita se encuentra ubicado en un punto interior del intervalo de integración</u>**

El problema a resolver es: $\int_a^b f(x)\,dx \quad \wedge \quad \text{no existe } f(c) \quad \wedge \quad c \in (a, b)$

Y podemos considerar el siguiente gráfico




En este caso, similar al último visto en las de primera especie, es necesario descomponer el intervalo de integración en la suma de otros dos. Para ello hay que adoptar un valor intermedio del mismo: *"c"* y aplicamos una propiedad vista en la integral definida (propiedad aditiva del intervalo de integración), y entonces tenemos: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

Por consiguiente, es preciso resolver dos integrales impropias similares a las vistas en los casos anteriores. Por lo tanto, vamos a reemplazar los extremos "c" por las variables $t_1$ y $t_2$ respectivamente y luego aplicamos los límites laterales para ellas tendiendo a dicho extremo. Es decir:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t_1 \to c^-} \int_a^{t_1} f(x)\,dx + \lim_{t_2 \to c^+} \int_{t_2}^{b} f(x)\,dx$$

<u>Ejemplos</u>:

1.- Calcular la siguiente integral: $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$

Para resolverla cambiamos el extremo superior de la misma por una variable *t* y resolvemos el límite para dicha variable tendiendo a infinito:

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \left[-e^{-x}\right]_0^t = \lim_{t\to\infty} \left[-e^{-t} + e^0\right]$$

Aplicamos la Regla de Barrow, restando solamente calcular el límite. Por lo tanto:

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \left[-e^{-t} + e^0\right] = \lim_{t\to\infty} \left[1 + \frac{1}{e^t}\right] = \left[1 + \frac{1}{e^\infty}\right] = 1$$

Como el resultado es finito, la misma es <u>*convergente.*</u>

2.- Calcular la siguiente integral: $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$

Para resolverla, al igual que en el ejemplo anterior, cambiamos el extremo superior de la misma por una variable t y resolvemos el límite para dicha variable tendiendo a infinito, es decir:

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to\infty}\int_1^{t}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to\infty}\int_1^{t} x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_1^t = \lim_{t\to\infty}\left[2\,(\sqrt{t}-\sqrt{1}\,)\right] = 2\left(\sqrt{\infty}-1\right) = \infty$$

Como el resultado es infinito, la misma es <u>*divergente.*</u>

3.- Calcular la siguiente integral: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

En este ejemplo, la integral presenta una discontinuidad infinita en el extremo superior de la misma. Por Si reemplazamos por la variable *t* y luego resolvemos el límite para este tendiendo a 1, es decir:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to 1}\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to 1}\left[arc\ \ sen\,x\right]_0^t = \lim_{t\to 1}\left[arc\ \ sen\,t - arc\ sen\,0\right] =$$

$$= arc\ \ sen\,1 - arc\ sen\,0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

Integral Impropia <u>*convergente.*</u>

4.- Calcular la siguiente integral: $\int_0^2 \frac{dx}{x^3}$

En este caso la discontinuidad infinita está en el extremo inferior y es el que reemplazamos. Por lo tanto:

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^3} = \lim_{t\to 0}\int_t^2 x^{-3}dx = \lim_{t\to 0}\left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_t^2 = \lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{-2x^{-2}}\right]_t^2 = \lim_{t\to 0}\left[-\frac{1}{8}+\frac{1}{2t^2}\right] = -\frac{1}{8}+\frac{1}{0} = \infty$$

Integral Impropia <u>*divergente.*</u>